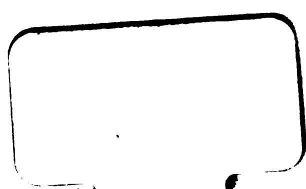





Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡ

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS;

PAR

M. Maurice LÉVY,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE CENTRALE
DES ARTS ET MANUFACTURES.

DEUXIÈME ÉDITION.

III[e] PARTIE.

ARCS. PONTS SUSPENDUS. CORPS DE RÉVOLUTION.

TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887


HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY
JUN 25 1962

TABLE DES MATIÈRES

DE LA TROISIÈME PARTIE.

PREMIÈRE SECTION.

ARCS MÉTALLIQUES.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE IV.

DEUXIÈME SECTION.

ACTIONS EXERCÉES PAR DES FORCES NORMALES AU PLAN DE LA FIBRE MOYENNE, PARTICULIÈREMENT PAR LE VENT SUR LES OUVRAGES FORMÉS DE FERMES EN CHARPENTE.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

TROISIÈME SECTION.

PONTS SUSPENDUS A TABLIERS RIGIDES.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

QUATRIÈME SECTION.

CORPS DE RÉVOLUTION SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉS.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

NOTES.

NOTE I.

de gauche à droite, l'axe des y vertical ascendant. Nous compterons les moments positifs de gauche à droite, soit des y positifs vers les x positifs.

Désignons par

$$u, \quad v$$

les composantes parallèles aux axes de coordonnées du déplacement élastique d'un point G de la fibre moyenne, dont les coordonnées, lorsque cette fibre a sa forme naturelle, sont x et y;

Par

$$\Omega$$

l'angle dont a tourné la section de l'arc passant par ce point, angle compté positivement lorsque la rotation s'effectue de gauche à droite ou des y positifs vers les x positifs;

Respectivement par

$$\mathrm{M},\quad \mathrm{N},\quad \mathrm{T},\quad \mathrm{I},\quad \mathrm{S},\quad \mathrm{E},\quad g\mathrm{E}$$

le moment de flexion, la compression de la fibre moyenne, l'effort tranchant, le moment d'inertie, l'aire et les coefficients d'élasticité longitudinale et transversale dans la section considérée;

Par des lettres portant l'indice zéro, les quantités se rapportant à un point particulier G_0 de la fibre moyenne, choisi une fois pour toutes, mais arbitrairement, à la gauche du point G;

Par des lettres accentuées les quantités qui se rapportent à un point quelconque G' compris entre G_0 et G;

Par s_0, s' et s les longueurs des arcs compris respectivement entre les points G_0, G', G et une origine fixe, ces longueurs comptées positivement de gauche à droite, en sorte que $s_0 = 0$ si le point G_0 est pris comme origine des arcs;

Par δ le coefficient de dilatation, par la chaleur, de la matière qui constitue l'arc;

Par τ sa température comptée en prenant la température de pose pour zéro de l'échelle thermométrique, ces deux grandeurs étant supposées constantes dans toute l'étendue de l'arc.

Nous rappellerons que nous entendons par *moment de flexion en un point* G la somme des moments, relativement à ce point, des forces agissant à sa gauche, de sorte que les moments de flexion positifs sont ceux qui tendent à ouvrir l'arc s'il est supporté (ce serait l'inverse s'il était suspendu); la compression N de la

fibre moyenne au point G est la somme des projections des mêmes forces sur la tangente à la fibre moyenne en G, cette somme comptée positivement dans le sens des s positifs ou de gauche à droite, de façon que N est positif si l'arc est réellement comprimé, négatif dans le cas contraire; l'effort tranchant T est la somme des projections de ces mêmes forces sur la normale à l'arc, la normale positive étant telle que, dans la section parallèle à l'axe des y, son sens soit celui des y positifs, soit le sens ascendant; il en résulte que le sens de la normale positive en un point est celui qui, en partant du point, s'éloigne du centre de courbure si l'arc est supporté ou tourne sa concavité vers le bas et, au contraire, celui qui va vers le centre de courbure si l'arc est suspendu.

De ces diverses combinaisons il résulte que, dans les formules (A_0) du § 296 on doit adopter les signes inférieurs et qu'elles deviennent

$$(A_0)\quad \begin{cases} u = u_0 + \Omega_0(y-y_0) - \int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}(y-y')\,ds' \\ \qquad + \delta\tau(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{N'}{E'S'}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{T'}{g'E'S'}\,dy, \\ v = v_0 - \Omega_0(x-x_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}(x-x')\,ds' \\ \qquad + \delta\tau(y-y_0) - \int_{y}^{y_0} \frac{N'}{E'S'}\,dy + \int_{x_0}^{x} \frac{T'}{g'E'S'}\,dx, \\ \Omega = \Omega_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}\,ds'. \end{cases}$$

Si l'on néglige les effets de la température, ceux de l'effort tranchant et de la compression de la fibre moyenne devant ceux de la flexion, il vient

$$(A)\quad \begin{cases} u = u_0 + \Omega_0(y-y_0) - \int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}(y-y')\,ds', \\ v = v_0 - \Omega_0(x-x_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}(x-x')\,ds', \\ \Omega = \Omega_0 - \int_{0}^{s} \frac{M'}{E'I'}\,ds'. \end{cases}$$

Si le point G_0 est fixe et est pris pour origine des coordonnées, on aura

$$u_0 = v_0 = 0,$$
$$x_0 = y_0 = 0.$$

On peut d'ailleurs faire sortir x et y des signes d'intégration, puis supprimer les accents sous les signes d'intégration, ce qui ne change pas la valeur des intégrales définies, celles-ci ne dépendant que des limites d'intégration et non du mode de désignation de la variable par rapport à laquelle on intègre, de sorte qu'on aura

$$(\mathrm{A}') \quad \begin{cases} u = \left(\Omega_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI} ds\right) y + \int_{s_0}^{s} \frac{My}{EI} ds, \\ v = -\left(\Omega_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI} ds\right) x - \int_{s_0}^{s} \frac{Mx}{EI} ds, \\ \Omega = \Omega_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI} ds \end{cases}$$

ou

$$(\mathrm{A}'') \quad \begin{cases} u = \Omega y + \int_{s_0}^{s} \frac{My}{EI} ds, \\ v = -\Omega x - \int_{s_0}^{s} \frac{Mx}{EI} ds, \\ \Omega = \Omega_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI} ds. \end{cases}$$

Si l'on appelle X et Y les sommes des projections, sur les axes des x et des y, des forces qui agissent à la gauche du point G, on a

$$(c) \quad \begin{cases} N = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds}, \\ T = -X \frac{dy}{ds} + Y \frac{dx}{ds}. \end{cases}$$

Par suite, les formules (A_0) deviennent, par une transformation facile et en observant que $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$,

$$(\mathrm{A}_1) \quad \begin{cases} u = u_0 + \Omega_0(y - y_0) + \delta\tau(x - x_0) - \int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}(y - y') ds' \\ \qquad - \int_{s_0}^{s} \frac{X'}{E'S'} ds' - \int_{y_0}^{y} \left(1 + \frac{1}{g'}\right) \frac{T'}{E'S'} ds', \\ v = v_0 - \Omega_0(x - x_0) + \delta\tau(y - y_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{M}{E'I'}(x - x') ds' \\ \qquad - \int^{s} \frac{Y'}{E'S'} ds' + \int_{y_0}^{y} \left(1 + \frac{1}{g'}\right) \frac{T'}{E'S'} ds', \\ \Omega = \Omega_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'} ds'. \end{cases}$$

Si l'on néglige les termes contenant l'effort tranchant

$$(A_2)\quad\begin{cases} u = u_0 + \Omega_0(y - y_0) + \delta\tau(x - x_0) \\ \qquad - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}(y - y')\,ds' - \int_{s_0}^{s} \frac{X'}{E'S'}\,ds', \\ v = v_0 - \Omega_0(x - x_0) + \delta\tau(y - y_0) \\ \qquad + \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}(x - x')\,ds' - \int_{s_0}^{s} \frac{Y'}{E'S'}\,ds', \\ \Omega = \Omega_0 - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{M'}{E'I'}\,ds'. \end{cases}$$

Rappelons enfin que

$$X = -\frac{\partial M}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Par suite, à cause de (c),

$$(d)\qquad T = \frac{\partial M}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial M}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{dM}{ds}.$$

§ 421.

Théorème fondamental. — *Si, aux divers éléments ds d'un arc de section et d'élasticité constantes ou variables, soumis à des charges quelconques (verticales ou non) et reposant sans encastrement sur deux tourillons fixes* A *et* B *de niveau ou non, on applique des forces fictives* $\frac{M}{EI}\,ds$, *parallèles à la corde* AB, *dirigées dans un sens arbitrairement convenu ou en sens contraire, suivant que* M *est positif ou négatif, leur résultante coïncide avec cette corde* [1].

Pour le démontrer, prenons la droite AB (*fig.* A, page 8) pour axes des x, le point A pour origine et l'axe des y perpendiculaire à Ax [2].

---

[1] Ce théorème suppose qu'on néglige l'effort tranchant et la compression de la fibre moyenne.

[2] En général, les points d'appui A et B sont les extrémités de l'arc; mais le

La composante u du déplacement élastique d'un point quelconque de la fibre moyenne ayant x et y pour coordonnées est fournie par la première des équations (A″) du § 423

$$u = + \Omega y + \int_0^s \frac{M}{EI} y\, ds.$$

Si on l'applique en particulier au point B, dont l'ordonnée y est nulle, on voit que son déplacement suivant la corde AB est

$$(1) \qquad u = \int \frac{M}{EI} y\, ds,$$

l'intégrale étant prise dans toute la longueur de l'arc comprise entre A et B et, comme le point B est fixe, on a, en ce point, $u = 0$ et par suite

$$(2) \qquad \int \frac{M}{EI} y\, ds = 0,$$

qui signifie que la somme des moments de forces fictives $\frac{M\, ds}{EI}$ parallèles à la droite AB par rapport à tout point de celle-ci est nulle, que, par suite, il en est de même du moment de la résultante de telles forces, ce qui indique que cette résultante coïncide avec la corde elle-même.

Remarques. — On voit que la démonstration ne suppose pas nécessairement que A et B sont les deux extrémités de l'arc. Celui-ci pourrait se prolonger au delà de ses appuis sans que le théorème cessât d'être vrai. Les forces $\frac{M\, ds}{EI}$ ne seraient, dans ce cas, toujours à appliquer qu'à la portion d'arc comprise entre A et B.

Dans les applications nous supposerons que ces deux points sont les extrémités de l'arc. Si l'arc est d'élasticité constante, de section constante ou variable, le théorème s'applique à des forces

---

théorème précédent subsiste quels que soient ces points, même si l'arc se prolonge au delà de ses appuis ou de l'un d'eux. Mais, dans ce cas, les forces $\frac{M\, ds}{EI}$ ne doivent toujours être appliquées qu'à la portion de l'arc comprise entre A et B.

fictives $\frac{M}{I} ds$ et l'équation (2) devient

$$(2') \qquad \int \frac{M}{I} y \, ds = 0.$$

Si, en outre, il est de section constante, le théorème s'applique à des forces fictives $M ds$ et l'équation (2) devient

$$(2'') \qquad \int M y \, ds = 0.$$

§ 425.

EXPRESSION DE LA POUSSÉE. — Soient (*fig.* A, page 8) **1**, **2**, **3**, **4**, **5** les charges supposées verticales qui agissent sur un arc ACB posé sur deux tourillons de niveau A et B. Le polygone des pressions est (§ 69) un des polygones funiculaires de ces charges assujettis à passer par les points A et B. Soit A.1.2.3.4.5B ce polygone dont la distance polaire inconnue mesurée à l'échelle des forces représente la poussée q de l'arc.

Le moment de flexion M en un point quelconque G est égal (§ 198) au produit de cette distance polaire par la portion d'ordonnée ζ comprise entre le polygone des pressions et l'arc, cette portion d'ordonnée étant comptée positivement ou négativement suivant que le polygone est extérieur ou intérieur à l'arc. Ainsi

$$(3) \qquad M = q\zeta,$$

ou

$$M = q(z - y),$$

z et y désignant les ordonnées du polygone et de l'arc comptées depuis leur corde commune AB.

Traçons (*fig.* A_0 et a) un polygone funiculaire des forces données entièrement arbitraire $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$, de distance polaire q_0 choisie selon les convenances de l'épure, et prolongeons-en les côtés extrêmes jusqu'à leurs rencontres avec les verticales A et B en α_0 et β_0 ; soit z_0 son ordonnée comptée depuis la corde $\alpha_0 \beta_0$. On a identiquement (§ 43 *bis*)

$$(4) \qquad qz = q_0 z_0.$$

Par suite

$$(4') \qquad M = q_0 z_0 - q y,$$

Fig. A.

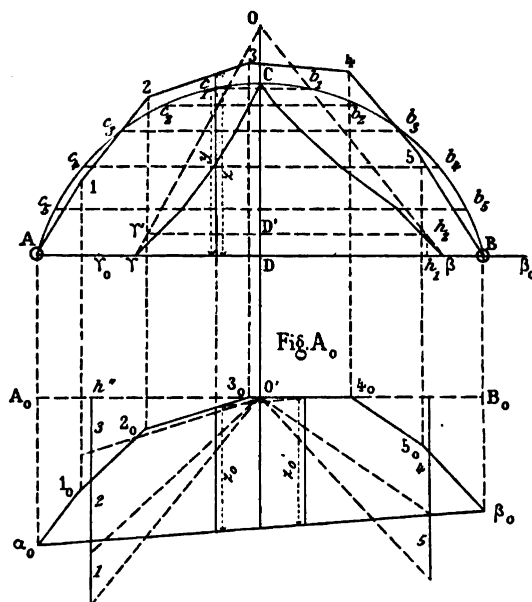
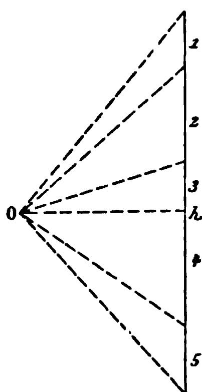


Fig. *a*.



expression où tout est connu sauf la constante q. Pour la déterminer, il suffit d'appliquer le théorème du paragraphe précédent

ou de porter cette expression dans l'équation (2), ce qui donne

$$(5)\qquad q_0\int\frac{z_0\,ds}{\mathrm{EI}}y = q\int\frac{y\,ds}{\mathrm{EI}}y.$$

L'intégrale du premier membre représente la somme des moments par rapport à un point de la corde AB de forces horizontales $\frac{z_0\,ds}{\mathrm{EI}}$, toutes de même sens (puisque z_0 ne change pas de signe), appliquées à tous les éléments de l'arc. Celle du second membre représente la somme analogue pour des forces horizontales $\frac{y\,ds}{\mathrm{EI}}$. Toutes ces forces sont connues.

Remarque. — La valeur commune des deux membres de (4) n'est autre que le moment de flexion μ que détermineraient les charges qui agissent sur l'arc, si elles agissaient sur sa corde regardée comme une poutre posée sur appuis simples à ses extrémités, de sorte que la formule (4') peut encore s'écrire

$$(4'')\qquad \mathrm{M} = \mu - qy,$$

expression qu'on pourrait écrire directement en observant (§ 61) que les réactions verticales des culées d'un arc posé sur rotules, sous l'influence de charges quelconques, sont les mêmes que si ces charges agissaient sur la corde de l'arc regardée comme une poutre simplement posée sur les culées.

Si l'on porte l'expression (4') dans la formule (2'), on obtient encore pour définir la poussée, l'équation

$$(5')\qquad \left\{\begin{aligned} & q\int\frac{y^2\,ds}{\mathrm{EI}} = \int\frac{\mu y\,ds}{\mathrm{EI}},\\ & q = \frac{\int\frac{\mu y\,ds}{\mathrm{EI}}}{\int\frac{y^2\,ds}{\mathrm{EI}}},\end{aligned}\right.$$

qui ne diffère pas au fond de celle (5). La première est plus commode pour les applications graphiques, la seconde pour l'emploi des méthodes analytiques.

§ 426.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE LA POUSSÉE ET DU POLYGONE DES PRESSIONS D'UN ARC DE SECTION CONSTANTE OU VARIABLE. — Pour appliquer la formule (5) graphiquement, concevons qu'on divise l'arc en un certain nombre de parties égales de longueur commune Δs et remplaçons approximativement les intégrales par des sommes. L'équation (5) deviendra, en supprimant le facteur Δs commun à tous les termes des deux nombres,

$$q_0 \sum \frac{z_0}{EI} y = q \sum \frac{y}{EI} y. \tag{6}$$

Le coefficient de q_0 représente la somme des moments, relativement à un point de la corde AB, de forces horizontales toutes de même sens, appliquées aux points de division de l'arc et de grandeurs connues,

$$\frac{z_0}{EI}.$$

De même, le coefficient de q représente la somme des moments analogues de forces ayant les mêmes lignes d'action que les précédentes, toutes de même sens et de grandeurs connues,

$$\frac{y}{EI}.$$

Ces deux sommes de moments peuvent aisément se représenter par deux longueurs. Pour simplifier l'épure, nous supposerons, ce qui a lieu généralement, que l'arc considéré ACB (*fig.* A, page 8) soit de structure symétrique par rapport à la verticale CD de son sommet, les charges pouvant ne pas être symétriques (¹).

Désignant par z_0 et z'_0 les ordonnées déterminées dans le polygone funiculaire $\alpha_0 \beta_0$ par deux verticales symétriquement placées par rapport à CD, on aura

$$\sum \frac{z_0}{EI} y = \sum_{AC} \frac{z_0 + z'_0}{EI} y,$$

(¹) La méthode graphique s'étend sans difficulté à des arcs de structure dissymétrique.

la seconde somme ne s'étendant qu'à une moitié de l'arc, par exemple, à la moitié AC.

De même,

$$\sum \frac{y}{\mathrm{EI}} y = 2 \sum_{\mathrm{CB}} \frac{y}{\mathrm{EI}} y,$$

la seconde somme ne s'étendant aussi qu'à la moitié de l'arc; nous prenons la seconde moitié CB.

Donc l'équation (6) devient, dans le cas d'un arc symétrique,

$$(7) \qquad q_0 \sum_{\mathrm{AC}} \frac{z_0 + z'_0}{2\mathrm{EI}} y = \sum_{\mathrm{BC}} \frac{y}{\mathrm{EI}} y.$$

Remarque. — Dans chacune de ces deux sommes, le terme qui se rapporte au sommet C doit être réduit à la moitié de sa valeur; car la force unique agissant sur l'un des points de division c_i remplace les forces continues qui agissent sur chacun des deux demi-intervalles $c_i c_{i-1}$ et $c_i c_{i+1}$. Au point C il n'y a qu'un de ces demi-intervalles, puisqu'on ne considère qu'une moitié de l'arc.

Ceci étant, nous supposons que le nombre de parties dans lesquelles on a divisé l'arc soit, en général, pair et que sur la figure ce nombre soit douze, les points de division étant

$$\mathrm{C}; \quad c_1, b_1; \quad c_2, b_2; \quad \ldots, \quad c_5, b_5.$$

Pour construire la somme $\sum \frac{z_0 + z'_0}{2\mathrm{EI}}$, au point C, on devra, en vertu de la remarque ci-dessus, appliquer une force

$$\frac{1}{2} \frac{z_0 + z'_0}{2\mathrm{EI}} = \frac{z_0}{2\mathrm{EI}},$$

z_0 étant l'ordonnée découpée dans le polygone $\alpha_0 \beta_0$ par la verticale IC, et E et I étant les valeurs du coefficient d'élasticité et du moment d'inertie de l'arc en son sommet; au point c_1 une force horizontale $\frac{z_0 + z'_0}{2\mathrm{EI}}$, z_0 et z'_0 désignant les ordonnées découpées par les verticales symétriques c et b; E et I étant les valeurs du coefficient d'élasticité et du moment d'inertie en chacun de ces deux points; de même, en c_2, c_3, c_4, ...

Sans entrer dans le détail des opérations, qui seront précisées par un exemple, concevons : 1° qu'on forme le polygone de ces

forces en les portant bout à bout, à une échelle quelconque, sur la demi-horizontale DA à partir du point D. Soit $D\gamma_0$ la longueur du polygone ainsi formé; 2° qu'on construise le polygone funiculaire de ces forces en prenant un pôle arbitraire O sur la verticale DC et ce même point O pour point de départ du polygone, en sorte que son premier côté OC coïncide avec le premier rayon polaire OD. Soit $OC\gamma$ ce polygone dont les sommets sont sur les lignes d'action des forces, soit sur les horizontales C; $c_1 b_1$; $c_2 b_2$; ..., $c_5 b_5$; γ désigne le point d'intersection du dernier côté avec la corde.

Si $d = \text{OD}$ est la distance polaire, on a (§ 119)

$$\sum_{\text{AC}} \frac{z_0 + z'_0}{2\text{EI}} y = d \times \gamma\text{D}.$$

En faisant la même opération sur les forces $\frac{y}{\text{EI}}$ appliquées suivant les mêmes horizontales, les portant bout à bout dans la direction DB à la même échelle que les précédentes et construisant le polygone funiculaire $\text{C}\beta$ de même pôle O, on aura

$$\sum_{\text{BC}} \frac{y}{\text{EI}} y = d \times \beta\text{D}.$$

Par suite, l'équation (7) devient, en supprimant le facteur commun d,

$$q_0 \times \gamma\text{D} = q \times \beta\text{D},$$

qui fournit q par la construction d'une quatrième proportionnelle.

Pour l'obtenir, joignons le point O aux points β et γ. Prenons Dh_1 égal à la distance polaire $q_0 = Oh$ (*fig. a*). Menons (*fig.* A) la verticale $h_1 h_2$ jusqu'à sa rencontre en h_2 avec $O\beta$, puis l'horizontale $h_2 D'\gamma'$ jusqu'à sa rencontre avec $O\gamma$. On aura $q = D'\gamma'$, cette longueur étant naturellement mesurée à l'échelle des forces adoptée sur la *fig. a* pour les charges données.

Remarque I. — On peut, si on le veut, se dispenser de construire cette quatrième proportionnelle en observant que, la distance polaire q_0 du polygone $\alpha_0\beta_0$ (*fig. a*) étant arbitraire, on peut commencer, avant tout, par déterminer (*fig.* A) la longueur βD qui ne

dépend que de la structure de l'arc et non des charges qu'il porte et qui est à trouver une fois pour toutes, puis prendre pour la distance polaire q_0 du polygone funiculaire $\alpha_0\beta_0$ des charges réelles

(8) $$q_0 = \beta D,$$

d'où résultera directement

(8') $$q = \gamma D.$$

S'il était plus commode de prendre q_0 égal à un multiple ou sous-multiple simple n de βD, en sorte que

(9) $$q_0 = n \times \beta D,$$

on aurait de même

(9') $$q = n \times \gamma D.$$

Remarque II. — Si l'arc est très surbaissé, il suffit d'amplifier les ordonnées y des points de division C; c_2, b_2; c_3, b_3; ... dans un rapport arbitraire $k:1$ et de supposer des forces

$$\frac{z_0 + z'_0}{2EI} \quad \text{et} \quad \frac{y}{EI},$$

appliquées aux extrémités des nouvelles ordonnées. Cela aura pour effet de multiplier par k les moments de toutes ces forces; par suite, le rapport des sommes de ces moments, rapport qui entre seul dans l'équation (6) et celles qui en sont déduites, ne sera pas modifié.

Remarque III. — Si l'arc est d'élasticité constante, son coefficient d'élasticité E disparaît en facteur commun de toutes les équations, et c'est sur les forces

$$\frac{z_0 + z'_0}{2I} \quad \text{et} \quad \frac{y}{I}$$

qu'on aura à opérer

Si l'arc est en même temps de section constante, le moment d'inertie I disparaît également, et c'est sur des forces égales ou proportionnelles aux ordonnées

$$\frac{z_0 + z'_0}{2} \quad \text{et} \quad y,$$

directement mesurables sur la figure, qu'on aura à opérer.

Pour les premières, soient (*fig.* A_0) z_0 et z'_0 deux ordonnées équidistantes de la verticale O′; joignons leurs extrémités supérieures; l'ordonnée comprise entre cette ligne de jonction et la corde, déterminée par la verticale O′, est évidemment la demi-somme

$$\frac{z_0 + z'_0}{2}.$$

Remarque IV. — Le pôle du polygone funiculaire $\alpha_0\beta_0$, dont la distance polaire q_0 peut être prise quelconque à moins qu'on se la donne en mettant à profit la remarque I, est lui-même arbitraire. Nous le prendrons généralement, avec Eddy, sur la perpendiculaire au polygone des forces menée par le point de division qui sépare les deux forces limitrophes de la verticale du sommet de l'arc. S'il passe une force par ce sommet, on prendra le pôle sur la perpendiculaire au polygone des forces, menée par le milieu du côté de ce polygone représentant la force agissant au sommet de l'arc. Ici (*fig. a*) le pôle O serait sur l'horizontale menée par le point 3.4 à la distance $Oh = q_0$ jugée convenable. Le côté $3_0.4_0$ du polygone funiculaire qui joint les deux forces limitrophes de la verticale du sommet de l'arc est donc horizontal. Les côtés $3_0.2_0$, $2_0.1_0$, $1_0\alpha_0$ sont parallèles aux trois rayons polaires placés au-dessus de l'horizontale Oh et les côtés $4_0.5_0$, $5_0\beta_0$ parallèles à ceux placés au-dessous de cette ligne. On peut, par suite, supprimer la figure *a* et l'annexer à celle A_0 en prenant pour pôle le point O′ où la verticale qui passe par le sommet de l'arc coupe le point $3_0.4_0$. A cet effet, prenons

$$O'h' = O'h'' = Oh = q_0.$$

Sur la verticale du point h' placé à la droite de O′, portons les forces 4 et 5 agissant de ce côté du sommet de l'arc en commençant par la plus voisine du milieu de l'arc.

De même, sur la verticale du point h'', portons, bout à bout, les forces 3, 2, 1 en commençant aussi par la plus voisine du milieu.

Les rayons polaires issus de O′ et allant vers les points de division des deux portions h' et h'' du polygone des forces donnent les portions correspondantes du polygone funiculaire.

Si la charge agissant sur une moitié de la poutre, par exemple, sur la moitié de gauche, est uniforme, la portion $O'\alpha_0$ du polygone

funiculaire devient un arc de parabole et, comme sa tangente en O′ qui remplace le côté $O'3_0$ est horizontale, ce point O′ est le sommet de la courbe, quelles que soient les charges agissant sur la moitié de droite.

§ 427.

APPLICATION A UN ARC DE SECTION CONSTANTE. — Considérons un arc circulaire ACB (*fig.* A, *Pl. XXXIII*) dont la portée soit

$$AB = 160^m,$$

et la flèche $CD = 42^m,50$. Ce sont les dimensions de l'arc du beau pont établi par MM. Eiffel et Seyrig sur le Douro à Porto. Nous le représentons à l'échelle de 1^{mm} par mètre.

Nous le supposerons d'abord soumis à une charge uniforme sur sa moitié de gauche et entièrement vide ou dépourvu de charge sur sa moitié de droite.

Divisons-le en 16 parties égales, soit chaque moitié en 8 parties à partir de son sommet C. On aura les points de division

$$c_1,\quad c_2,\quad c_3,\quad c_4,\quad c_5,\quad c_6,\quad c_7$$

pour la partie de gauche, et ceux

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad b_4,\quad b_5,\quad b_6,\quad b_7$$

pour celle de droite. Désignons par y_0 la flèche CD et par

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad y_5,\quad y_6,\quad y_7$$

les ordonnées des points de division.

Doublons-les, ce qui donnera les points marqués

$$C';\quad c'_1,\ b'_1;\quad c'_2,\ b'_2;\quad \ldots.$$

Ceci posé, nous ferons successivement les opérations suivantes :

1° **Tracé du polygone funiculaire** $C'\beta$. — A partir de D, portons, bout à bout, suivant DA, des longueurs proportionnelles aux or-

données $\frac{1}{2}y_0, y_1, y_2, \ldots, y_7$ (1). Nous porterons

$$\frac{1}{2}\frac{y_0}{2} = \frac{y_0}{4}, \quad \frac{y_1}{2}, \quad \frac{y_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{y_7}{2},$$

de sorte que nous aurons le polygone dont les côtés marqués

$$0', \quad 1', \quad 2', \quad 3', \quad 4', \quad 5', \quad 6', \quad 7'$$

représentent respectivement des forces dont les lignes d'action sont les horizontales menées par

$$C', \quad b'_1, \quad b'_2, \quad b'_3, \quad b'_4, \quad \ldots, \quad b'_7.$$

Prenons le point C′ pour pôle et menons les rayons polaires; puis construisons le polygone funiculaire correspondant $C'\beta$.

2° Courbe funiculaire des charges. — Le polygone funiculaire des charges devient ici un arc de parabole.

Nous prenons, profitant de la *Remarque I* du paragraphe précédent, pour distance polaire

$$q_0 = D\beta.$$

Menons (*fig.* A_0) une horizontale quelconque $A_0 O' B_0$.

Prenons $O'h'' = q_0$, et sur la verticale de h'' portons la charge totale. Cette charge est de $80p$ s'il agit p unités de force par mètre.

Représentons par une longueur de 1^{mm} la charge p par mètre, en sorte que le polygone des forces aura une longueur de $0^m,08$. Soit h''_1 son extrémité.

Si l'on prend le point O′ pour point de départ de la parabole courbe funiculaire des charges, elle est tangente au rayon horizontal $O'h''$, c'est-à-dire que O′ sera le sommet de la courbe; sa tangente au point où elle coupe la verticale de l'appui A sera parallèle au rayon polaire $O'h''_1$. Prolongeons ce rayon jusqu'à son intersection en h''_2 avec la verticale de l'appui A; le point α_0, milieu de $A_0 h''_1$, est le point où la courbe a sa tangente parallèle à $O'h''_1$.

(1) Dans la pratique, il serait préférable de les porter dans le sens DB pour dégager un peu la moitié de gauche de l'épure. Ici, on a réservé cette partie pour d'autres indications.

Au milieu de $O'A_0$, l'ordonnée de la courbe sera $\frac{A_0\alpha_0}{4}$; au tiers, $\frac{A_0\alpha_0}{9}$; .... On peut donc la tracer très exactement.

Sur la partie de droite, le polygone funiculaire se réduit à l'horizontale $O'B_0$, de sorte que sa corde est $\alpha_0 B_0$.

3° **Tracé du polygone funiculaire** $C'\gamma$. — On peut à présent former les longueurs des forces horizontales à appliquer aux points

$$(c) \qquad c', \quad c'_1, \quad c'_2, \quad c'_3, \quad \ldots, \quad c'_7.$$

Au point C', c'est la moitié de l'ordonnée $O'D'$ comprise entre la parabole et sa corde, déterminée par la verticale de C'; au point b'_1, la moyenne des ordonnées déterminées par les verticales b'_1 et c'_1, et ainsi de suite; les moyennes s'obtiennent comme il est dit à la fin de la *Remarque III* du paragraphe précédent.

Leurs longueurs doivent être réduites à la moitié de leurs valeurs comme les ordonnées y, dans le tracé du polygone $C'\beta$.

On porte ces longueurs réduites bout à bout suivant DA, ce qui donne les forces

$$0'', \quad 1'', \quad 2'', \quad 3'', \quad 4'', \quad 5'', \quad 6'', \quad 7'',$$

appliquées aux points C', c'_1, c'_2, ...

On mènera les rayons polaires issus de C', et le polygone funiculaire correspondant est le polygone cherché $C'\gamma$.

4° **Tracé du polygone des pressions.** — La poussée q est

$$q = \gamma D.$$

Ayant la poussée, on peut trouver le polygone des pressions qui, pour le demi-arc chargé, est une parabole et pour le demi-arc vide, une droite.

Modifions (*fig.* A_0) l'ordonnée $O'D'$ du polygone funiculaire $\alpha_0 B_0$ dans le rapport $D\beta : D\gamma$, c'est-à-dire construisons une ligne

$$z = \frac{O'D' \times D\beta}{D\gamma}$$

en portant sur $O'B_0$, à partir de O', les longueurs égales à $D\beta$

et $D\gamma$ (la première $O'h''$ se trouve toute portée), joignant l'extrémité γ' de la dernière à D' et menant par l'extrémité de la première une parallèle à cette ligne; la longueur $z = OD''$ ainsi obtenue est portée à partir de D, ce qui donne l'extrémité C_0 de la parabole funiculaire.

Cette courbe ayant une distance polaire connue q et devant passer par les points A et C_0 est dès lors facile à tracer.

Par le milieu ω de $h''h''_1$ menons une parallèle à AC_0; le pôle O'' est (§ 43) à l'intersection de cette ligne avec la verticale menée à la distance $q = \gamma D$ de $h''h''_1$.

Les tangentes à la parabole en A et C_0 sont respectivement parallèles à $O''h''$ et $O''h''_1$.

Comme vérification (¹), la verticale du point d'intersection de ces tangentes doit passer par le milieu de AC_0 et le milieu de cette portion de verticale donne un nouveau point de la courbe où la tangente est parallèle à AC_0, ce qui suffit pour la tracer.

La tangente en C_0 qui forme le côté extrême du polygone des pressions, puisque la moitié de droite de l'arc n'est pas chargée, doit passer par l'appui B (¹).

Le moment de flexion en chaque point de l'arc est le produit $q \times \zeta$ de la poussée par la portion d'ordonnée comprise entre le polygone des pressions AC_0B et l'arc donné ACB, l'un des facteurs mesuré à l'échelle des forces, l'autre à l'échelle des longueurs.

Supposons que ζ et q soient mesurés en millimètres, en sorte que ces deux lettres représentent les nombres de millimètres contenus dans les deux lignes.

Comme l'échelle des longueurs est de 1^{mm} par mètre et l'échelle des forces de 1^{mm} par p^{kgm}, le moment sera

$$M = q \times \zeta \times p \text{ kilogrammètres,}$$

c'est-à-dire le moment d'une force $q \times \zeta \times p^{kgm}$ agissant sur un bras de levier de 1^m.

Si la charge p régnait sur toute la longueur de l'arc, il est évident, à cause de la symétrie, que le moment de flexion en chaque point serait $q \times (\zeta + \zeta')p$, ζ étant l'ordonnée comprise entre le

(¹) Pour le tracé de la parabole, *voir* Note II *bis*, t. I.

polygone des pressions et l'arc, au point considéré, et ζ' l'ordonnée analogue en son symétrique.

Si, outre la charge permanente p, il régnait une surcharge p' sur la moitié de gauche de l'arc, le moment en un point serait

$$M = q \times [(\zeta + \zeta')p + \zeta p'].$$

§ 428.

APPLICATION A UN ARC DE SECTION VARIABLE. — Supposons que l'arc précédent soit de section variable, mais toujours de structure symétrique par rapport à la verticale du milieu, en sorte que c'est la somme des moments de forces égales *ou proportionnelles* aux rapports

$$\frac{y}{I} \quad \text{et} \quad \frac{z_0 + z'_0}{2I}$$

qu'on a à faire, I désignant le moment d'inertie en chaque point (1).

Admettons que l'on puisse diviser l'arc entier en neuf parties (égales ou inégales) telles que, dans chaque partie, le moment d'inertie soit sensiblement constant. Prenant pour unité la valeur du moment d'inertie dans la partie centrale de l'arc, supposons que, dans les autres parties symétriquement placées par rapport à celle-ci, les valeurs de I soient respectivement $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$. Alors (*fig.* A, *Pl. XXXIII*) les ordonnées z_0 de la partie centrale peuvent être conservées, c'est-à-dire que, dans la partie centrale comprise, je suppose, entre les points p_1, p'_1 (*fig.* A_0), on a

$$\frac{z_0}{I} = z_0.$$

Dans les deux parties symétriques $p_1 p_2$ et $p'_1 p'_2$, où $I = \frac{4}{5}$, on a

$$\frac{z_0}{I} = \frac{5}{4} z_0.$$

---

(1) Si le coefficient d'élasticité était lui-même variable, c'est EI qui se trouverait en dénominateur : cela ne changerait rien à la marche qui va être indiquée.

Dans les parties p_2p_3 et $p'_2p'_3$, où $I = \frac{3}{5}$, on a

$$\frac{z_0}{I} = \frac{5}{3}z_0.$$

Dans les parties p_3p_4, $p'_3p'_4$, où $I = \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{z_0}{I} = 2z_0.$$

Enfin, dans les segments extrêmes où $I = \frac{2}{5}$, on a

$$\frac{z_0}{I} = \frac{5}{2}z_0.$$

En amplifiant ainsi les ordonnées z_0 on obtient, à la place de la corde $\alpha_0 B_0$, le contour brisé tracé en traits discontinus fins, et ce sont les ordonnées comprises entre la courbe funiculaire $\alpha_0 O'B_0$ et ce contour brisé qui remplacent celles z_0 et z'_0 du paragraphe précédent.

Si l'on appelle z_1 l'une quelconque de ces ordonnées et z'_1 sa symétrique, aux points C, c'_1, c'_2, ..., c'_6, ce sont des forces égales ou proportionnelles à $\frac{z_1+z'_1}{2}$ qu'il faut appliquer au lieu de celles $\frac{z_0+z'_0}{2}$.

De même (*fig.* A), aux points C, b'_1, b'_2, ..., b'_6, au lieu de forces égales ou proportionnelles aux ordonnées y comprises entre le demi-arc CB et la corde DB, ce sont des forces égales ou proportionnelles aux ordonnées comprises entre cet arc et le contour brisé indiqué en pointillé sur la droite de la figure et déduit des ordonnées y, comme celui de la *fig.* A_0, a été déduit de z_0. Ici, à cause de la symétrie, il suffit d'opérer sur la moitié de l'arc.

Les nouvelles forces remplaçant celles y et $\frac{z_0+z'_0}{2}$ étant ainsi obtenues, la marche du paragraphe précédent se conserve sans modification.

§ 429.

POUSSÉES PRODUITES DANS SES DIVERSES POSITIONS PAR UN POIDS MOBILE PARCOURANT UN ARC. — Si un poids unique P parcourt un arc de

section constante ou variable, on pourrait, par la méthode qui précède, déterminer la poussée et, par suite, le polygone des pressions qu'il produira dans chacune de ses positions. Mais cette marche serait compliquée si on l'appliquait à un grand nombre de positions; je vais établir un théorème qui permet de trouver la poussée dans toutes les positions de la charge, par la construction d'un seul polygone funiculaire en dehors de celui C′β, tracé une fois pour toutes et indépendant des charges, défini au § 427.

THÉORÈME. — *Si un mobile unique parcourt un arc de section constante ou variable, et qu'en chaque élément dx de la corde de l'arc, considérée comme une poutre droite posée sur appuis simples à ses extrémités, on applique une force fictive égale ou proportionnelle à* $\frac{y}{I}\frac{ds}{dx}dx = \frac{y}{I}ds$, *force connue, ne dépendant que des dimensions de l'arc, le moment de flexion que ces forces déterminent en un point quelconque de la poutre représente, à un facteur constant près, la poussée que le mobile, arrivé sur la verticale de ce point, détermine dans l'arc.*

En effet, l'expression analytique de la poussée d'un arc d'élasticité constante, de section constante ou variable, est, d'après la formule (5′) du § 425,

$$(8) \qquad q = \frac{\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds},$$

les intégrales étant étendues à l'arc entier supposé de longueur s, μ désignant le moment de flexion que produirait la charge, quelle qu'elle soit, sur la corde de l'arc regardé comme une poutre à appuis simples.

Prenons l'extrémité gauche de l'arc pour origine des coordonnées; la corde pour axe des x. Soient α l'abscisse d'un poids unique P agissant sur l'arc et σ la longueur de la portion de l'arc comprise entre son extrémité gauche et le point d'application de la charge P.

Le moment de flexion μ que celle-ci ferait naître sur la corde

considérée comme une poutre est, savoir :

$$\text{Pour } x < \alpha \dots\dots\dots\dots \quad \mu = \mathrm{P}\,\frac{l-\alpha}{l}\,x$$

$$\text{Pour } x > \alpha \dots\dots\dots\dots \quad \mu = \mathrm{P}\,\frac{\alpha}{l}(l-x)$$

Donc

$$\int_0^s \frac{\mu y}{\mathrm{I}}\,ds = \int_0^\sigma \frac{\mu y}{\mathrm{I}}\,ds + \int_\sigma^s \frac{\mu y}{\mathrm{I}}\,ds$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{l-\alpha}{l}\int_0^\sigma \frac{xy}{\mathrm{I}}\,ds + \frac{\alpha}{l}\int_\sigma^s \frac{l-x}{\mathrm{I}}\,y\,ds\right),$$

qu'on peut écrire

$$\int_0^s \frac{\mu y}{\mathrm{I}}\,ds = \mathrm{P}\left[\alpha\int_0^s \frac{l-x}{l}\,\frac{y\,ds}{\mathrm{I}} - \int_0^\sigma \left(\frac{l-x}{l}\,\alpha - \frac{l-\alpha}{l}\,x\right)\frac{y}{\mathrm{I}}\,ds\right]$$

ou

$$\int_0^s \frac{\mu y}{\mathrm{I}}\,ds = \mathrm{P}\left[\alpha\int_0^s \frac{l-x}{l}\,\frac{y\,ds}{\mathrm{I}} - \int_0^\sigma (\alpha-x)\frac{y}{\mathrm{I}}\,ds\right].$$

Par suite,

$$(9) \qquad q = \frac{\mathrm{P}}{\displaystyle\int_0^s \frac{y}{\mathrm{I}}\,ds}\left[\alpha\int_0^s \frac{l-x}{l}\,\frac{y\,ds}{\mathrm{I}} - \int_0^\sigma (\alpha-x)\frac{y}{\mathrm{I}}\,ds\right].$$

Or, si l'on applique aux divers éléments de la poutre fictive que forme la corde des forces $\frac{y\,ds}{\mathrm{I}}$, la réaction de l'appui gauche sera l'intégrale qui multiplie α dans le premier terme du crochet. Donc ce terme est le moment de cette réaction par rapport au point d'abscisse α; le second terme est la somme des moments relativement à ce même poiut des forces agissant entre lui et l'appui gauche. Donc le crochet est bien le moment de flexion, en ce point de la poutre, des charges considérées. D'ailleurs le premier facteur est une constante ou une grandeur indépendante de l'abscisse α qui définit la position du poids P, de sorte que la proposition énoncée se trouve établie.

§ 430.

LIGNE DE POUSSÉE. — Supposons un poids $P = 1$ circulant sur un arc de section constante ou variable. Dans chacune de ses positions, suivant la verticale du poids, portons, à partir de la corde de l'arc, une ordonnée proportionnelle à la poussée qu'il détermine. Le lieu des points ainsi obtenus est ce que j'appellerai *ligne de poussée* de l'arc. Elle passe nécessairement par les deux appuis.

THÉORÈME. — *La ligne de poussée d'un arc quelconque est une courbe funiculaire, assujettie à passer par ses deux appuis, de forces fictives verticales, proportionnelles à* $\frac{y}{I}\,ds$ ($y\,ds$ *si l'arc est de section constante*), *appliquées aux éléments* ds *de l'arc.*

En effet, si l'on construit une telle courbe, ses ordonnées sont (§ 194) proportionnelles aux moments de flexion que les forces $\frac{y\,ds}{I}$ produiraient dans la corde de l'arc regardée comme une poutre simplement appuyée à ses extrémités. Ces ordonnées sont donc aussi, en vertu du théorème du paragraphe précédent, proportionnelles aux poussées qu'un poids voyageur détermine dans l'arc et, par suite, la courbe dont il s'agit peut être considérée comme la ligne de poussée de l'arc, en adoptant une échelle des forces convenable.

Remarque. — Pour utiliser graphiquement les résultats qui précèdent, on divisera l'arc en un certain nombre de parties égales Δs et l'on remplacera les forces élémentaires $\frac{y}{I}\,ds$ par celles en nombre fini $\frac{y}{I}\,\Delta s$, appliquées aux points de division, ou par celles $\frac{y}{I}$, proportionnelles aux précédentes, puisque le facteur Δs est le même pour toutes les forces, et l'on remplacera la courbe funiculaire des forces $\frac{y}{I}\,ds$ par le polygone funiculaire des forces $\frac{y}{I}$. Dans ces conditions, l'expression (9) de la poussée devient, en remplaçant les intégrales par des sommes et supprimant le facteur

Δs commun au numérateur et au dénominateur

$$(10)\qquad q = \mathrm{P}\,\frac{\alpha\sum\limits_0^l \frac{l-x}{l}\frac{y}{\mathrm{I}} - \sum\limits_0^\alpha (\alpha - x)\frac{y}{\mathrm{I}}}{\sum\limits_0^s \frac{y^2}{\mathrm{I}}},$$

et, si la poutre est de section constante,

$$(10')\qquad q = \mathrm{P}\,\frac{\alpha\sum\limits_0^l \frac{l-x}{l}y - \sum\limits_0^\alpha (\alpha - x)y}{\sum\limits_0^s y^2},$$

équations où les numérateurs sont les moments de flexion des forces $\frac{y}{\mathrm{I}}$ (y si l'arc est de section constante) appliquées aux divers points de division, relativement au point d'application de la charge mobile.

D'après cela, construisons un polygone funiculaire de distance polaire quelconque d des forces verticales $\frac{y}{\mathrm{I}}$ (y si l'arc est de section constante); prolongeons ce polygone jusqu'aux verticales des appuis, et le produit $\eta \times d$ de la distance polaire par l'ordonnée η coïncidant avec la verticale du poids P et comprise entre le polygone et sa corde représente (§ **194**) le numérateur de l'expression de q; par conséquent, le même polygone fournit ce numérateur pour autant de positions du poids qu'on le désire.

Le dénominateur, qui est une constante, est de même représenté, une fois pour toutes, par un produit $d \times h$ de deux lignes dont l'une peut être prise égale à d (§ **426**). Donc

$$q = \mathrm{P} \times \frac{d \times \eta}{d \times h} = \mathrm{P} \times \frac{\eta}{h},$$

et il suffit de mesurer sur l'épure les deux longueurs η et h à une échelle commune *quelconque* (par exemple en millimètres et fractions de millimètre), de faire le quotient $\frac{\eta}{h}$ des deux nombres obtenus; ce quotient, *indépendant de toute échelle,* est le nombre

abstrait par lequel il faut multiplier le poids P pour avoir la poussée qu'il produit lorsqu'il coïncide avec la verticale η, c'est-à-dire avec l'une quelconque des verticales passant par les points de division.

§ 431.

APPLICATION A UN ARC SYMÉTRIQUE ET DE SECTION CONSTANTE. — Appliquons la règle qui précède à l'arc de section constante et symétrique ACB déjà étudié et figuré sur la *Pl. XXXIII* (*fig.* A). Divisons-le encore en seize parties égales par les points de division

$$C;\quad c_1,\ b_1;\quad c_2,\ b_2;\quad \ldots;\quad c_7,\ b_7.$$

Nous supposons que le poids P agisse successivement aux divers points de division :

$$c_7,\ \ c_6,\ \ c_5,\ \ c_4,\ \ c_3,\ \ c_2,\ \ c_1;\ \ C,\ \ b_1,\ \ b_2,\ \ \ldots,\ \ b_7,$$

et nous nous proposons de déterminer la poussée qu'il produit dans chacune de ces positions. Il est clair que, dans deux positions symétriques, il produit les mêmes poussées.

Sur l'épure de la *Pl. XXXIII,* les ordonnées des points b'_i sont (§ 427) les doubles de celles y_i de l'arc donné; en revanche, sur le polygone $D\beta_0$ des forces fictives y_i, les mêmes ordonnées ont été réduites de moitié; il en résulte que le polygone funiculaire $C'\beta$ de ces forces donne

$$\sum_0^{\frac{s}{2}} \frac{y}{2} \times 2y = \sum_0^{\frac{s}{2}} y^2 = C'D \times D\beta,$$

et, comme l'arc est symétrique,

$$(11)\qquad \sum_0^{s} y^2 = 2\sum_0^{\frac{s}{2}} y^2 = 2C'D \times D\beta.$$

Soit y_i l'ordonnée commune à deux points symétriques quelconques c_i et b_i, et y_0 l'ordonnée du point C, c'est-à-dire la flèche de l'arc. Concevons une force égale à y_0 appliquée en C; des forces égales à y_1 appliquées en c_1 et b_1; des forces égales à y_2 appliquées en c_2 et b_2, et ainsi de suite; enfin des forces égales à y_7 appliquées

en c_7 et b_7. Ne considérons que celles de ces forces qui agissent sur le demi-arc BC et qui comprennent : 1° celles

$$y_7,\ y_6,\ y_5,\ y_4,\ y_3,\ y_2,\ y_1,$$

appliquées respectivement aux points

$$b_7,\ b_6,\ b_5.\ b_4,\ b_3,\ b_2,\ b_1.$$

2° *la moitié* de celles y_0 appliquée en C.

Portons-les bout à bout de haut en bas sur la verticale du point β en commençant par celle du sommet et en les réduisant au quart de leurs longueurs, pour ne pas trop allonger le polygone des forces, de sorte que les longueurs portées successivement sont

$$\frac{y_0}{8},\ \frac{y_1}{4},\ \frac{y_2}{4},\ \ldots,\ \frac{y_7}{4};$$

soit ββ′ le polygone ainsi obtenu.

Construisons le polygone funiculaire de ces forces en prenant le point D pour pôle et l'appui gauche A de l'arc comme point de départ. Nous aurons ainsi le polygone $A\gamma_7\gamma_6\gamma_5\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_0$, dont les côtés $A\gamma_7$, $\gamma_7\gamma_6$, ... sont parallèles aux rayons polaires qui se succèdent en partant de celui Dβ′.

Le symétrique de ce polygone serait le polygone funiculaire de même pôle des forces y_i agissant sur le demi-arc de droite, de sorte que le polygone complet est celui $A\gamma_0B$.

Ceci posé, lorsque le poids P agit en l'un quelconque des points de division, par exemple en c_2, le produit

$$4 \times D\beta \times \eta_2$$

de la distance polaire par l'ordonnée η_2 du polygone $A\gamma_0B'$, comptée depuis sa corde, représente le numérateur de l'expression (10′) de la poussée. Le facteur 4 vient de ce que les forces y_i ont été, sur le polygone des forces, réduites au quart de leur grandeur.

Si donc on désigne par q_2 la poussée que produit le poids P lorsqu'il agit en c_2, on aura, en vertu de (11),

$$q_2 = P\frac{4 \times D\beta \times \eta_2}{2C'D \times D\beta} = P\frac{\eta_2}{CD}.$$

Généralement, si η est l'une des ordonnées de ce polygone et q la poussée que l'unité de poids détermine quand elle agit suivant la verticale η, on aura

$$q = \frac{\eta}{CD}.$$

Le polygone $A\gamma_0 B$ dont les ordonnées η sont proportionnelles aux poussées q peut donc être considéré comme la ligne de poussée de l'arc, et, si un poids P agit suivant la verticale η, la poussée qu'il détermine s'obtient en multipliant ce poids par le rapport de l'ordonnée η à la flèche CD de l'arc. Si un poids P agit au sommet de l'arc et qu'on appelle q_0 la poussée qu'il détermine dans cette position, on aura

$$q_0 = P \times \frac{\gamma_0 D}{CD}.$$

Or, sur l'épure, mesurée en millimètres, on trouve

$$\gamma_0 D = 26.$$

D'ailleurs, par les données mêmes,

$$CD = 42,5.$$

Donc

$$q_0 = P \times \frac{26}{42,5} = 0,61 P,$$

c'est-à-dire qu'un poids P, placé au sommet de l'arc, produit une poussée qui est les 0,61 de ce poids. Si $P = 1$, $q_0 = \frac{\gamma_0 D}{CE} = 0,61$, c'est-à-dire que l'unité de poids, quelle qu'elle soit, placée au sommet de l'arc, produit une poussée qui est représentée par le nombre $\frac{\gamma_0 D}{CD} = 0,61$ d'unités de forces; ce sera $0^{kg},61$ ou $0^{t},61$, suivant que l'unité de poids est le kilogramme ou la tonne.

§ 432.

ARC DE SECTION VARIABLE. — Si l'arc était de section variable, la marche à suivre serait exactement la même, sauf que, au lieu de procéder sur les ordonnées proportionnelles à y, on procéderait sur des ordonnées proportionnelles à $\frac{y}{I}$, et ces ordonnées se détermineraient au préalable comme au § **428**.

§ 433.

LIGNES D'INFLUENCE DANS UN ARC DE SECTION CONSTANTE OU VARIABLE. — Le tracé direct des lignes d'influence d'un arc serait une opération très laborieuse.

Le moyen que nous allons indiquer nous paraît simplifier beaucoup le problème et le rendre très accessible à la pratique.

Considérons (*fig.* 46, p. 29) une section transversale de l'arc de section constante ou variable, mais de structure symétrique, faite au point X d'abscisse quelconque x.

Pour obtenir la ligne d'influence relative à la section X, on doit (§ 302) supposer un poids $P = 1$ parcourant l'arc et, dans chacune de ses positions G, porter, à partir de la corde AB, une ordonnée égale ou proportionnelle au moment de flexion qu'il détermine dans la section considérée : le lieu des extrémités de ces ordonnées est la ligne d'influence relative à la section X.

Le moment de flexion a pour expression

$$M = \mu - qy, \tag{12}$$

μ étant le moment de flexion que le poids $P = 1$ produirait au point k d'abscisse x de la poutre droite AB dans sa position actuelle G et q la poussée qu'il produit dans cette même position.

Si donc α est l'abscisse du point mobile G, le terme μ est une fonction des deux quantités x et α, c'est-à-dire de la position de la section X et de la position actuelle du poids voyageur, tandis que q est une fonction de la seule variable α.

Si, dans cette équation, on regarde x et, par suite, les coordonnées x et y comme deux paramètres constants et α et M comme des coordonnées courantes, elle représente la ligne d'influence relative à la section X.

On tire de là

$$\frac{M \times CD}{y} = \frac{\mu \times CD}{y} - q \times CD. \tag{12}$$

Au lieu de porter en ordonnées les moments de flexion M, nous pouvons porter les valeurs du premier membre de cette équation, valeurs qui, pour chaque section, sont proportionnelles à celles

de M. Soit z ces valeurs, en sorte que

(13) $$M = \frac{z}{CD} \times y,$$

et, quand on connaîtra la valeur maxima que prend z dans une section donnée X, par suite du passage d'un convoi, il suffira de

Fig. 46.

la multiplier par le rapport de l'ordonnée y de cette section à la flèche CD de l'arc pour avoir la valeur maxima du moment de flexion qui peut s'y produire.

On a

$$z = \frac{\mu \times CD}{y} - q \times CD.$$

Au lieu de porter en ordonnées à partir de la droite AB les valeurs de z, convenons de porter séparément les valeurs de chacun des deux termes qui composent le second membre. Ces deux

termes sont essentiellement positifs; si on les porte dans le même sens, par exemple de bas en haut, les portions d'ordonnées comprises entre les deux courbes obtenues représenteront les valeurs de z, valeurs positives ou négatives suivant que la ligne fournie par le premier terme est au-dessus ou au-dessous de celle fournie par le second.

Mais cette dernière ne dépend que de la position du poids voyageur et non de la section X. C'est donc une courbe fixe à tracer une fois pour toutes, à savoir la ligne de poussée (§ 430) dont les ordonnées sont précisément

$$\eta = q \times \mathrm{CD}.$$

Il s'agit maintenant de construire la ligne que l'on obtient en portant en ordonnée, à partir de AB, la valeur

(14) $$z' = \frac{\mu \times \mathrm{CD}}{y},$$

qui forme le premier terme. Cette nouvelle ligne est particulière à chaque section, c'est-à-dire qu'il faut en construire autant qu'il y a de sections sur lesquelles on veut étudier l'influence d'un convoi mobile. Mais le rapport $\frac{\mathrm{CD}}{y}$ étant une constante pour chaque section, on voit que chacune des lignes à construire n'est autre qu'une ligne d'influence relative à la poutre droite AB. Elle est donc formée (§ 302) par deux droites passant (*fig.* 46, p. 29) par les appuis A et B et se coupant sur la verticale du point X. Il suffit donc de déterminer le point K où elles se coupent sur cette verticale : or la valeur de μ répondant à la verticale du point X est, par définition, celle du moment de flexion que le poids $\mathrm{P} = 1$ appliqué suivant cette verticale au point k de la poutre droite AB produit en ce point même, et cette valeur est

$$\mu = \frac{x(l-x)}{l},$$

$x = \mathrm{A}k$ étant l'abscisse du point X et $l = \mathrm{AB}$ la portée de l'arc. Donc l'ordonnée $\mathrm{K}k$ du point K que nous appelons z'_x est

$$z'_x = \mathrm{K}k = \frac{x(l-x)}{ly} \times \mathrm{CD}.$$

Si l'on construit la courbe lieu des points K représentée par cette dernière équation, où x et z'_x sont les coordonnées courantes (y étant une fonction de x n'y figure plus comme simple paramètre, mais comme variable), la connaissance de cette courbe fournit immédiatement pour n'importe quelle section le point K et, par suite, le contour AKB aux ordonnées z'. Ainsi, la construction de deux courbes seulement, *la ligne de poussée et celle dont il s'agit, fournit l'*équivalent *des lignes d'influence relatives à* toutes *les sections. Nous appellerons la ligne lieu des points* K *la ligne des* actions verticales, *par opposition à la ligne de poussée ou ligne des actions horizontales.*

§ 434.

CONSTRUCTION ET DISCUSSION DE LA LIGNE DES ACTIONS VERTICALES. — Rien n'est plus facile que de la construire par points.

Soit (*fig.* 46, p. 29) H le point où la verticale de X coupe l'horizontale menée par le sommet de l'arc. Par ce point, menez une parallèle à la droite AX qui joint le point X à l'un des appuis, par exemple à celui de gauche. Soit h le point de rencontre de cette parallèle avec la corde AB. Portez la longueur kh sur la verticale de l'appui A. On obtient le point S. Joignons ce point au second appui B. La ligne SB coupe la verticale du point X au point cherché K.

En effet, les triangles semblables Hhk et AKk donnent

$$\frac{kh}{k\mathrm{H}} = \frac{x}{y}$$

ou, comme $kh = \mathrm{AS}$ et $k\mathrm{H} = \mathrm{CD}$,

$$\mathrm{AS} = \frac{x}{y} \times \mathrm{CD}.$$

D'ailleurs les triangles BKk et BSA donnent

$$\frac{\mathrm{K}k}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{B}k}{\mathrm{BA}} = \frac{l-x}{l},$$

d'où

$$\mathrm{K}k = \frac{x(l-x)}{ly} \times \mathrm{CD} = z'_x.$$

On peut ainsi construire autant de points que l'on voudra.

Mais un petit nombre de points suffit.

La courbe est évidemment symétrique par rapport à la verticale CD. On construira donc le point situé sur cette ligne. Pour ce point, $y = \mathrm{CD}$ et

$$z'_x = \frac{x(l-x)}{l} = \frac{l}{4}.$$

L'ordonnée z'_x est le quart de la longueur AB. Il est bon de connaître les extrémités de la courbe, c'est-à-dire les ordonnées z'_x sur les appuis, ou l'une d'elles, puisqu'elles sont égales.

Or, pour $x = 0$,

$$y = 0 \quad \text{et} \quad z'_x = \mathrm{CD} \times \lim \frac{x}{y}.$$

Menons la tangente A t à l'arc donné.

Soit t son point d'intersection avec l'horizontale CA_0 et A_0 le point où cette horizontale coupe la verticale de l'appui. On a

$$\lim \frac{x}{y} = \operatorname{tang} \mathrm{A}_0 \mathrm{A} t;$$

par suite

$$z'_x = \mathrm{AA}_0 \times \operatorname{tang} \mathrm{A}_0 \mathrm{A} t = \mathrm{A}_0 t.$$

Ainsi, prenant les ordonnées $\mathrm{A}t_0 = \mathrm{B}t_1 = \mathrm{A}_0 t$, on a les deux points extrêmes de la courbe.

Prenant $\mathrm{DC}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{AD}$, on a son sommet C_0.

Déterminant ensuite un ou deux points K et leurs symétriques K′, on peut tracer la courbe.

C'est ainsi qu'on a tracé la courbe $t_0 \mathrm{C}_0 t_1$ sur la *fig.* 46 et sur celle A de la *Pl. XXXIII.*

§ 435.

PASSAGE D'UN MOBILE UNIQUE SUR UN ARC. — Soit X un point de l'arc ACB (*fig.* A, *Pl. XXXIII*). Menons la verticale XK jusqu'à sa rencontre en K avec la courbe $t_0 \mathrm{C}_1 t_1$. Joignons le point K aux deux appuis A et B ; les portions d'ordonnées verticales z comprises entre le contour brisé AKB et la ligne de poussée $\mathrm{A}\gamma_0\mathrm{B}$ sont proportionnelles à celles de la ligne d'influence relative à la section X. Si l'on mène à la ligne de poussée une tangente parallèle à AK : 1° la verticale du point de contact; 2° la verticale déter-

minée par le point X de la section que l'on considère, fournissent les valeurs maxima des deux ordonnées z et z' qui soient comprises entre le contour brisé AKB et la ligne de poussée. La plus grande des deux est ici celle z répondant au point X. C'est donc quand le mobile occupe la position X, c'est-à-dire quand il passe dans la section considérée, qu'il y détermine le plus grand moment fléchissant possible, et ce moment est

$$M = P \times z \times \frac{y}{CD},$$

P étant le poids voyageur, y l'ordonnée de l'arc donné ACB au point X et CD la flèche de l'arc. La longueur z, qui est la portion de verticale comprise entre la ligne de poussée et le contour AKB, doit être mesurée à l'échelle des longueurs; le rapport $\frac{y}{CD}$ est indépendant de toute unité, en sorte que les deux termes peuvent être mesurés à l'échelle des longueurs.

Supposons que la tonne soit l'unité de force et que $P = 20^t$.

L'échelle des longueurs est de 1^{mm} par mètre. Alors, si z, y, CD ont été mesurés sur la figure en millimètres, on aura

$$M = 20 \times z \times \frac{y}{CD} \text{ tonnes-mètres},$$

c'est-à-dire que le moment de flexion maximum que le poids détermine dans la section X est le moment d'un couple dont la force est égale à $20 . z \frac{y}{CD}$ tonnes et dont le bras de levier est 1^m. On trouve

$$z = 18^{mm},5, \qquad y = 34^{mm},0.$$

D'ailleurs

$$CD = 42^{mm},5,$$

d'où

$$M = 20 \times 18,5 \times \frac{34,0}{42,5} = 296^{tm},6.$$

§ 436.

PASSAGE D'UN CONVOI SUR UN ARC. — Supposons (*fig.* A, *Pl. XXXIII*) que, au lieu d'un poids unique, il passe un convoi formé de cinq essieux dont les poids sont

$$P_1 = 4^t,35, \quad P_2 = 4^t,05, \quad P_3 = 6^t,45, \quad P_4 = 6^t,3, \quad P_5 = 6^t,85.$$

Admettons que la distance entre P_1 et P_2 soit de $2^m,52$, celle entre P_2 et P_3 de $1^m,16$, celle entre P_3 et P_4 de $1^m,36$ et celle entre P_4 et P_5 de $1^m,16$. C'est un des types que nous avons indiqués dans la première Partie (§ 222). Il s'agit de trouver la position à donner au convoi pour qu'il détermine le moment de flexion maximum dans la section quelconque X et la valeur de ce moment. Il est évident que le convoi devra être à cheval sur la section X qui donnerait le moment maximum en X si le convoi se réduisait à un seul essieu. Plaçons-le ainsi au sentiment dans la position indiquée sur la figure par les verticales P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Nous l'avons placé de façon que le centre de gravité de tout le convoi soit sensiblement sur la verticale X. Ce centre de gravité serait facile à déterminer par le tracé d'un polygone funiculaire. Mais on voit par un calcul sommaire qu'il tombe entre les deux charges P_3 et P_4. Nous plaçons donc le convoi de façon que la verticale X soit entre ces deux charges. Soient p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 les points où les verticales des essieux coupent la ligne de poussée. Pour savoir dans quel sens il faut déplacer le convoi à partir de cette position pour l'amener dans la position la plus défavorable à la section X, portons (*fig. a*) sur une horizontale ab les charges P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 à l'échelle de 2^{mm} pour une tonne. Soient 1, 2, 3, 4, 5 les longueurs ainsi obtenues.

Par le point a, menons une parallèle à la tangente à la ligne de poussée en p_1, jusqu'à sa rencontre avec la verticale du point 1.2 de la *fig. a*; de là une parallèle à la tangente en p_2 jusqu'à la verticale du point 2.3; puis les parallèles aux tangentes en p_3, p_4, p_5, jusqu'aux verticales 3.4, 4.5 et b. On formera ainsi le contour polygonal ab' qui est sensiblement une droite. Menons, d'autre part, du point a, la ligne ak parallèle à AK jusqu'à sa rencontre en k avec la verticale du point 3.4 qui, sur le polygone des forces ab, sépare les deux forces limitrophes de la section X et par le point k une ligne kb'' parallèle à kB jusqu'à sa rencontre en b'' avec la verticale du point b. En raisonnant sur les ordonnées z comprises entre la ligne de poussée et la ligne brisée AKB comme on a raisonné au § 312 sur les ordonnées comptées depuis une horizontale, on verra que la position choisie ne répondrait au moment maximum en X que si le point b' coïncidait avec b''. C'est ce qui n'a pas lieu; il faut donc déplacer le convoi dans un sens

tel que, si l'on construit les contours analogues à ab' et akb'' répondant à sa nouvelle position, la nouvelle ordonnée $b'b''$ soit nulle ou de signe contraire à celle $b'b''$ elle-même, c'est-à-dire de façon que le nouveau point b'' vienne passer au-dessous du nouveau point b'. Comme, par suite d'un petit déplacement, le point b' ne change presque pas, pour que le point b'' se déplace assez pour passer au-dessous de b', il faut mouvoir le convoi vers la droite assez pour qu'un essieu franchisse la section. Ce sera l'essieu n° 3. Alors les deux essieux limitrophes de la section seront ainsi 2 et 3 ; le point k sera remplacé par k_1 et le point b'' sera remplacé par b''_1. Donc, à l'instant où l'essieu n° 3 franchit la section, l'accroissement du moment fléchissant change brusquement de signe en passant du positif au négatif, d'où je conclus que c'est *à cet instant même que le moment maximum se produit dans la section*. La *position correspondante* du convoi est donc celle que l'on cherche; elle est indiquée en pointillé.

Soient z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5 les ordonnées que les verticales des essieux déterminent alors entre la droite AK et la ligne de poussée, mesurées à l'échelle des forces. Le moment de flexion maximum que le passage du convoi détermine dans la section X est

$$M = \frac{y}{CD}(P_1 z'_1 + P_2 z'_2 + P_3 z'_3 + P_4 z'_4 + P_5 z'_5),$$

y étant l'ordonnée de l'arc au point X et CD la flèche de l'arc, les mesures étant prises comme au paragraphe précédent.

On trouve sur l'épure

$$z'_1 = 15{,}5, \qquad z'_2 = 16{,}5,$$
$$z'_3 = 18{,}0, \qquad z'_4 = 17{,}5, \qquad z'_5 = 16{,}5,$$

d'où, à cause de $y = 34{,}0$, CD $= 42{,}5$,

$$M = \frac{34{,}0 \times 473{,}62}{42{,}5} = 378^{tm}{,}9.$$

On peut aussi, au lieu de calculer la parenthèse, la construire.

A cet effet, sur une verticale (*fig. b, Pl. XXXIII*), à partir d'un point O, on portera

$$Oz'_1 = z'_1, \quad Oz'_2 = z'_2, \quad Oz'_3 = z'_3, \quad Oz'_4 = z'_4, \quad Oz'_5 = z'_5$$

dans un sens ou en sens contraire, suivant que les ordonnées z'_1,

z'_2, ... sont positives ou négatives. Aux points obtenus, on appliquera des forces horizontales P_1, P_2, ...; on construira un polygone funiculaire, de distance polaire CD de ces forces. Le produit CD $\times$ mn de cette distance polaire par le segment que l'horizontale Ox intercepte entre les côtés extrêmes de ce polygone donne la valeur de la parenthèse. Par suite

$$M = y \times mn.$$

Le segment mn sera naturellement mesuré à l'échelle des forces ou de 2^{mm} pour 1 tonne, et l'ordonnée y de l'arc à l'échelle des longueurs ou de 1^{mm} par mètre. Si donc on évalue y et mn en millimètres, on aura

$$M = \frac{y \times mn}{2} \text{ tonnes-mètres.}$$

On trouve

$$y = 34{,}0, \qquad mn = 22^{mm}{,}4\ ;$$

d'où

$$M = 380^{tm}{,}8,$$

chiffre peu éloigné de celui 378,9 trouvé par le calcul direct.

§ 437.

LIGNES D'INFLUENCE DES EFFORTS TRANCHANTS. — L'effort tranchant a pour expression

$$T = \frac{dM}{ds},$$

et, comme

$$M = \mu - qy,$$

on a

$$(15) \qquad T = \frac{d\mu}{ds} - q\frac{dy}{ds}$$

ou

$$T = \left(\frac{d\mu}{dy} - q\right)\frac{dy}{ds}.$$

Soient X le point de la fibre moyenne par lequel passe la section relativement à laquelle on cherche la ligne d'influence et i l'inclinaison de la tangente à l'arc en ce point. On aura

$$\frac{T}{\sin i} = \frac{d\mu}{dx}\cot i - q$$

ou

$$T \times \frac{CD}{\sin i} = \frac{d\mu}{dx} \times CD \cot i - q \times CD.$$

Soit

$$T \times \frac{CD}{\sin i} = z_t,$$

d'où

(16) $$T = z_t \times \frac{\sin i}{CD}$$

et

(17) $$z_t = \frac{d\mu}{dx} \times CD \cot i - q \times CD.$$

Pour une section donnée, les grandeurs x, y, i qui entrent dans cette équation sont des paramètres constants, et si l'on regarde α et z_t comme des coordonnées courantes, on aura l'équation de la ligne d'influence d'effort tranchant relative à la section quelconque X.

On voit que les ordonnées de cette ligne se composent de deux parties : l'une $q \times CD$ est l'ordonnée de la ligne de poussée; elle est indépendante de la section X que l'on considère et a déjà été tracée.

Donc, si l'on pose

(18) $$z'_t = \frac{d\mu}{dx} CD \cot i$$

et que l'on construise, pour chaque section X, une ligne ayant α pour abscisse et z'_t pour ordonnée, les parties d'ordonnées comprises entre la ligne de poussée et les lignes ainsi obtenues sont celles z_t et fournissent, par suite, les efforts tranchants par l'équation (16).

Or, en tous les points compris entre l'appui de gauche A (*fig.* 46, p. 29) et une section X, soit pour $\alpha < x$, on a

$$\mu = \frac{\alpha(l - x)}{l}$$

et, pour $\alpha > x$,

$$\mu = \frac{(l - \alpha)x}{l}.$$

Donc, pour $\alpha < x$,

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{\alpha}{l};$$

pour $\alpha > x$,

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{l-\alpha}{l},$$

et, par suite, pour $\alpha < x$,

$$z'_t = -\frac{\alpha}{l} \times \text{CD} \cot i$$

et, pour $\alpha > x$,

$$z'_t = \frac{l-\alpha}{l} \times \text{CD} \cot i.$$

Construisons les deux droites parallèles que représentent ces équations. La première passe par le point A ($z'_t = 0$ pour $\alpha = 0$) et son prolongement coupe la verticale du point B en un point b dont l'ordonnée est

$$z'_t = -\text{CD} \cot i.$$

La seconde passe par le point B et est parallèle à la précédente.

Par le point A, menons une parallèle à la tangente en X à l'arc donné jusqu'à sa rencontre en α avec l'horizontale du sommet de l'arc. On aura en valeur absolue

$$A_0\alpha = \text{CD} \cot i = z'_t.$$

Donc, sur la verticale de B, nous prendrons $Bb = A_0\alpha$ et nous mènerons la droite Ab et sa parallèle Ba.

Soient X′ et X″ les points où les droites Ab et Ba coupent la verticale de X. Les ordonnées z'_t sont celles des deux portions de droite AX′ et X″B; et les ordonnées z_t proportionnelles à celles de la ligne d'influence d'effort tranchant relative à la section X′ sont celles comprises entre la ligne de poussée $A\gamma_0 B$ construite une fois pour toutes et le contour brisé AX′X″B.

En passant d'une section X à une autre, on n'aura à prendre que la longueur Bb égale à la valeur de $A_0\alpha$ correspondant à cette section et à mener les deux parallèles Ab et Ba; mais on n'aura aucune courbe nouvelle à tracer.

Remarque. — Pour la section C du sommet, on a $\cot i = \infty$ et la construction précédente serait illusoire. Mais l'équation (15) donne, dans ce cas, à cause de

$$\frac{dy}{ds} = 0, \qquad \frac{dx}{ds} = 1,$$

$$T = \frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{dx},$$

qui montre que la ligne d'influence relative à l'effort tranchant au sommet de l'arc est la même que s'il n'y avait pas de poussée, c'est-à-dire est la même que celle de la section D du milieu d'une poutre AB simplement appuyée à ses extrémités. Pour l'obtenir, on prendrait (§ 305) Bb égal à l'*unité* de force, au lieu de prendre cette ordonnée égale à CD cot i; on joindrait Ab. Pendant qu'un mobile de poids P = 1 parcourt le demi-arc AC, l'effort tranchant qu'il produit sur la section C est l'ordonnée de la droite Ab et, pendant qu'il parcourt la partie symétrique, l'effort tranchant a les mêmes valeurs changées de signe.

Si une section est très voisine du sommet, la construction générale ci-dessus indiquée fournirait des points b et a très éloignés. Il sera nécessaire, pour de telles sections, de réduire toutes les ordonnées ainsi que celles de la ligne de poussée dans un même rapport, c'est-à-dire de les tracer à une échelle plus petite, de façon à rester dans les limites du dessin.

§ 438.

EFFORT TRANCHANT MAXIMUM PRODUIT PAR LE PASSAGE D'UN MOBILE UNIQUE SUR UN ARC. — Si un mobile unique de poids P passe sur l'arc, l'effort tranchant maximum qu'il produit sur une section donnée X se déduit immédiatement de la connaissance des lignes tracées. On mène une tangente à la ligne de poussée parallèle à Ab.

Soit, au point de contact, z_t'' la valeur de l'ordonnée z_t comprise entre la ligne de poussée et le contour AX'X''B. C'est là le maximum analytique de z_t. D'autre part, suivant la verticale de la section X, il y a deux ordonnées z_t : l'une comprise entre la ligne de poussée et la droite BX''a, l'autre entre la ligne de poussée et la droite AX'b. Soit z_t''' la plus grande de ces deux ordonnées.

On prendra la plus grande des deux ordonnées z_t'' et z_t'''. Appelons-la z_t^{IV}. Si le poids du mobile était l'unité de force, l'équation (17) donnerait, pour l'effort tranchant maximum,

$$T = z_t^{\text{IV}} \frac{\sin i}{\text{CD}}.$$

Comme ce poids est de P unités de force, on aura

$$T = P z_t^{\text{IV}} \frac{\sin i}{\text{CD}}.$$

Par le sommet C de l'arc, menons une parallèle à la tangente au point X. Si B_1 est le point d'intersection de cette ligne (non tracée) avec la corde AB, on aura

$$DB_1 = \frac{CD}{\sin i};$$

donc

$$T = P \frac{z_t^{IV}}{DB_1}.$$

Les longueurs z_t^{IV} et DB_1 doivent être mesurées à une même échelle arbitraire. On peut construire aussi une quatrième proportionnelle aux trois longueurs

$$P, \quad z_t^{IV}, \quad DB_1.$$

Cette ligne mesurée à l'échelle des forces représentera T.

§ 439.

EFFORT TRANCHANT MAXIMUM PRODUIT PAR LE PASSAGE D'UN CONVOI SUR UN ARC. — Pour avoir la position d'un convoi qui produit le plus grand effort tranchant dans une section donnée X, on devra le placer :

1° A cheval sur la section X elle-même et le déplacer suivant les règles du § 436, jusqu'à ce qu'on ait obtenu la position cherchée.

Si

$$z_{1t}, \quad z_{2t}, \quad z_{3t}, \quad \ldots, \quad z_{nt}$$

sont les ordonnées de z_t au droit des essieux dans la position obtenue et si

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_n$$

sont les charges de ces essieux, on aura, pour l'effort tranchant maximum cherché,

$$T = \frac{1}{DB_1}(P_1 z_{1t} + P_2 z_{2t} + \ldots + P_n z_{nt}).$$

On peut calculer la valeur de T ou la construire comme il est dit au § 436.

2° Il peut arriver que l'effort tranchant maximum dans une sec-

tion X soit produit, non quand le convoi est placé à cheval sur cette section même, mais quand il l'est sur la section qui, au paragraphe précédent, a fourni le maximum analytique z''_i. On fera ce second essai comme le premier et l'on adoptera définitivement la plus grande des deux valeurs obtenues.

§ 440.

LIEU DES SOMMETS DU POLYGONE DES PRESSIONS DU A UN POIDS MOBILE. — Il ne faut pas confondre la courbe que nous avons utilisée dans l'étude des lignes d'influence sous le nom de *ligne de poussée* avec celle que M. le professeur Winckler appelle la *ligne des réactions des appuis* (*Kämpferdrucklinien*). Cette dernière n'est autre, que le lieu du sommet du polygone des pressions dû à une charge mobile unique P (*fig.* 47, p. 42). Ce polygone est, en effet, le polygone funiculaire de distance polaire q de la charge unique passant par les points A et B. Ses deux côtés, AM_0 et M_0B, sont les directions des réactions des appuis. De là, le nom donné par M. Winckler au lieu de leur point d'intersection M_0.

Soient $AM = \alpha$ l'abscisse du poids mobile et $M_0M = \beta$ l'ordonnée correspondante du sommet du polygone des pressions. On a

$$\beta = \alpha \operatorname{tang} M_0AM = \alpha \frac{r_0}{q},$$

en désignant par r_0 la réaction verticale en A.

On a

$$r_0 = P\frac{l-\alpha}{l},$$

$l = AB$ étant la portée de l'arc.

Donc

$$\beta = P\frac{\alpha(l-\alpha)}{lq}.$$

Le rapport $\frac{P}{q}$ est indépendant du poids P. Si donc on convient d'appeler q la réaction produite par une charge $P = 1$, on aura

$$\beta = \frac{\alpha(l-\alpha)}{lq}$$

pour l'équation de la courbe de Winckler.

L'expression générale (9) du § 429 que nous avons donnée de la poussée, quelle que soit la forme symétrique de l'arc de section constante ou variable, permet de tracer cette courbe rapidement sans particulariser la forme de l'arc.

Cette même expression (9), si l'on y fait $P = 1$, donne

$$q = \frac{\int_0^{\sigma} \frac{xy}{I} ds + \alpha \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{I} ds}{\int_0^{s} \frac{y^2}{I} ds},$$

Fig. 47.

où σ représente l'arc AX; x et y les coordonnées courantes de l'arc donné rapportées à la courbe AB prise pour axe des x, la verticale du point A étant l'axe des y.

Pour avoir le point A_0 où la courbe coupe la verticale du point A, il faut, dans son équation, faire $\alpha = 0$, d'où $\sigma = 0$, $q = 0$ et

$$AA_0 = \beta = \left(\frac{\alpha}{q}\right)_{\alpha=0}.$$

Or de l'expression de q on tire

$$\frac{q}{\alpha} = \frac{\frac{1}{\alpha}\int_0^{\sigma} \frac{xy}{I} ds + \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{I} ds}{\int_0^{s} \frac{y^2}{I} ds}.$$

Pour $\alpha = 0$, le premier terme du numérateur devient $\frac{0}{0}$. Si on lui applique la règle de L'Hôpital, comme pour $\sigma = 0$ on a $x = y = 0$, on voit que ce terme est nul. Donc

$$\left(\frac{q}{\alpha}\right)_{\alpha=0} = \frac{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y}{I}\,ds}{\int^s \frac{y^2}{I}\,ds},$$

d'où

$$AA_0 = \beta_0 = \frac{\int_0^s \frac{y^2}{I}\,ds}{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y}{I}\,ds},$$

expression dont le numérateur a été construit § **427**, 1°, et **428**. Le dénominateur peut l'être facilement; car, en divisant l'arc en portions égales Δs, il vient

$$AA_0 = \frac{\sum_0^s \frac{y^2}{I}}{\sum_0^{\frac{s}{2}} \frac{y}{I}} = 2\frac{\sum_0^{\frac{s}{2}} \frac{y^2}{I}}{\sum_0^{\frac{s}{2}} \frac{y}{I}}.$$

Le numérateur est connu.

Si le moment d'inertie est constant, il disparaît en facteur commun et le dénominateur est la somme des ordonnées y des points de division. Si l'arc est de section variable, le dénominateur est la somme analogue des ordonnées $y' = \frac{y}{I}$ qu'on a formées pour construire le numérateur.

En tous cas, l'ordonnée à l'origine AA_0 de la courbe est double de celle du centre des forces parallèles $\frac{y}{I}$ (y si l'arc est de section constante) appliquées aux points de division d'une moitié de l'arc ou, si l'on veut, le double de l'ordonnée du centre de gravité d'une moitié de la fibre moyenne, en lui attribuant, si la section est variable, une densité linéaire proportionnelle à $\frac{1}{I}$.

La courbe étant symétrique, on a aussi le point B_0 placé sur la verticale de l'appui B.

Le sommet C_0 s'obtient en faisant $\alpha = \frac{l}{2}$, d'où $\sigma = \frac{s}{2}$, dans l'équation de la courbe. Sa forme générale est celle indiquée sur la *fig.* 47, p. 42.

On voit que cette courbe se trace moins commodément que celle que nous introduisons sous le nom de *ligne de poussée*, puisque cette dernière se trouve être un polygone funiculaire facile à obtenir. De plus, la ligne de poussée fournit le tracé des lignes d'influence d'un arc et permet, par suite, la discussion de l'action que celui-ci éprouve de la part d'un convoi mobile.

§ 441.

ACTION DE LA TEMPÉRATURE. — Nous avons, dans ce qui précède, supposé la température de l'arc invariable et égale à ce qu'elle était au moment de sa pose. Si cette température vient à croître ou à décroître, l'arc tend à se dilater ou à se contracter et, comme les appuis sont censés s'opposer d'une manière absolue à ce que cet effet se produise, leur présence fait naître de nouvelles réactions qui viennent, suivant les cas, s'ajouter à celles dues aux charges ou s'en retrancher.

Pour trouver la poussée due à la fois à des charges données et aux variations données de température, supposons que la température de la pose vienne à s'accroître de τ° C., τ étant un nombre positif ou négatif.

Soit δ le coefficient de dilatation, par la chaleur, de la matière supposée homogène dont l'arc se compose. Si son extrémité A était seule fixe et que son extrémité B fût libre de glisser sur un appui horizontal, sous l'influence de l'accroissement (positif ou négatif) de la température, sa corde de longueur l s'allongerait d'une quantité

$$\delta l \tau.$$

Sous l'influence des charges, il prendrait un autre déplacement que nous appelons u, de sorte que son déplacement total serait

$$u + \delta l \tau.$$

Mais, par suite de la fixité du point B, ce déplacement est nul. Ainsi

$$u + \delta l\tau = 0,$$

d'où

$$u = -\delta l\tau.$$

Mais le déplacement purement élastique dû à l'action des charges est donné (§ **424**) par la formule

$$u = \int_0^s \frac{M}{EI} y\, ds$$

ou, comme l'arc est supposé homogène,

$$u = \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M}{I} y\, ds.$$

D'où

$$(20) \qquad \int_0^s \frac{M}{I} y\, ds + E\delta l\tau = 0.$$

C'est cette équation qui remplace celle (2') du § **425** lorsqu'on a égard à la variation de température. Elle se déduirait aussi de la première des formules (A_0) du § **423**, en négligeant l'effort tranchant et la compression de la fibre moyenne.

Comme

$$M = \mu - qy,$$

on en tire

$$\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds - q\int_0^s \frac{y^2}{I} ds = -E\delta l\tau;$$

$$(21) \qquad q = \frac{\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds} + \frac{E\delta l\tau}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds}.$$

§ 442.

PRINCIPE DE SUPERPOSITION. DÉTERMINATION DE LA POUSSÉE DUE A LA TEMPÉRATURE. — Le premier terme du second membre est celui que nous avons étudié jusqu'ici: il représente la poussée due aux charges, abstraction faite de toute variation de température; ap-

pelons-le q_c :

$$q_c = \frac{\int_0^s \frac{\mu y}{I} ds}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds}.$$

Le second, que nous appelons q_τ, en sorte que

$$q_\tau = \frac{E\delta l\tau}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds},$$

représente la poussée due à la variation de température, abstraction faite de toute charge, et la poussée véritable

$$q = q_c + q_\tau$$

se compose de la somme de celles dues à chacune des deux, considérées séparément, ce qui confirme le principe de superposition des effets dus aux forces mécaniques et aux actions calorifiques.

La poussée q_τ est d'ailleurs facile à déduire de la formule ci-dessus.

On peut l'écrire

$$q_\tau = \frac{E\delta\tau \times l}{\Delta s \sum_0^s \frac{y^2}{I}}.$$

Si, pour construire le dénominateur, on a divisé l'arc total s en n parties égales,

$$q_\tau = \frac{E\,\delta\tau}{s} \times \frac{l \times n}{\sum_0^s \frac{y^2}{I}}.$$

Si l'arc est de section constante,

$$q_\tau = \frac{E\,\delta\tau \times I}{s} \times \frac{l \times n}{\sum_0^s y^2} = n\,\delta\tau \times ES \times \frac{lr^2}{s\Sigma y^2},$$

en appelant Sr^2 le moment d'inertie de la section d'aire S de l'arc.

Le dénominateur du second facteur nous est connu (§ 427) sous la forme du produit de deux longueurs; donc, le second facteur

$$\frac{l \times \frac{r^2}{s}}{s \sum_0 y^2}$$

peut se calculer en mesurant les longueurs l, s, r et celles qui donnent Σy^2 à une échelle commune *arbitraire* et divisant le produit des premières par celui des dernières.

Le premier facteur

$$n \delta \tau . \mathrm{ES}$$

se calcule aussi en nombre dès que les unités de longueur et de force ont été adoptées, de sorte qu'il n'y a aucune difficulté à calculer q_τ. Le produit $n\delta\tau$ est purement numérique. C'est le rapport de l'allongement qu'un accroissement de température de $n\tau$ degrés centigrades fait éprouver à une longueur quelconque d'arc, à cette longueur.

Le produit ES est une force, de sorte que des trois facteurs qui fournissent y^2, le premier et le troisième sont purement numériques et le second est, comme l'exige l'homogénéité, une force et ne dépend que de l'unité de force; l'unité de longueur n'influe pas sur le résultat.

Les choses se passent de même si le moment d'inertie I est variable d'une section à une autre. Dans ce cas, pour construire des longueurs proportionnelles à $\frac{y}{I}$, nous avons vu (§ 428) qu'on divise l'arc en sections, dans chacune desquelles le moment d'inertie reste sensiblement constant. On prend pour unité le moment d'inertie dans l'une de ces sections, et alors les moments d'inertie dans les autres sections sont représentés par de simples nombres; appelons k ces nombres, on construit les ordonnées $\frac{y}{k}$ et l'on construit sous forme de produit de deux longueurs la somme $\sum \frac{y^2}{k}$.

Soit $I_0 = S_0 r_0^2$ la valeur numérique véritable du moment d'inertie pris pour unité. Alors

$$I = I_0 \times k = S_0 r_0^2 \times k.$$

L'avant-dernière formule devient

$$q_\tau = n\delta\tau \times ES_0 \times \frac{lr_0^2}{s\sum_0^s \frac{y^2}{k}};$$

le dénominateur est encore connu sous forme du produit de deux longueurs.

La seconde fraction s'obtient donc en mesurant les longueurs l, s, r_0 et celles qui donnent le dénominateur à une échelle commune arbitraire. Quant au produit $n\delta\tau \times ES_0$, il se calcule directement, n étant un nombre abstrait, τ un nombre de degrés centigrades, E et S_0 des nombres connus dès que les unités de longueur et de force ont été choisies, et même le produit ES_0 est indépendant de la première de ces unités.

Ainsi, si l'on prend le mètre pour unité de longueur, le kilogramme pour unité de force et qu'il s'agisse du fer, on adopte assez souvent

$$E = 1,6 \times 10^{10}.$$

D'ailleurs le coefficient de dilatation du fer rapporté au degré du thermomètre centigrade peut être pris

$$\delta = 0,0000122.$$

S'il y a eu une augmentation de température de 30° par rapport à la température de pose, on fera

$$\tau = 30.$$

Si c'était une diminution de température de 30°, on ferait

$$\tau = -30.$$

Dans chaque cas, on fera les substitutions numériques et l'on effectuera le calcul très bref qui donne q_τ.

§ 443.

ACTIONS RÉUNIES DE LA TEMPÉRATURE, DE LA COMPRESSION DE LA FIBRE MOYENNE ET DE L'EFFORT TRANCHANT. — La première des formules (A_0) du § 423, appliquée à l'extrémité B de l'arc, donne, en observant :

1° Que, pour ce point, $x = l$, $y = 0$ et $u = 0$;

2° Que u_0, x_0 et y_0, se rapportant à l'extrémité A de l'arc, sont également nuls

$$o = \int \frac{My}{EI}\,ds + \delta\tau l - \int \frac{N}{ES}\,dx - \int \frac{T}{gES}\,dy,$$

où les intégrales sont étendues à l'arc entier (on a supprimé les accents des lettres qui subsistent sous les signes d'intégration, ce qui ne change pas la valeur des intégrales).

Les coefficients d'élasticité longitudinale et transversale étant en général constants dans toute l'étendue de l'arc, on peut écrire

$$o = E\,\delta\tau l + \int \frac{My}{I}\,ds - \int \frac{N}{S}\,dx - \frac{1}{g}\int \frac{T}{S}\,dy = o.$$

Comme (§ 425)

$$M = \mu - qy;$$

que, d'autre part, en appelant N_ν et T_ν les valeurs connues qu'auraient N et T si la poussée n'existait pas, on aura

$$N = N_\nu + q\frac{dx}{ds},$$

$$T = T_\nu - q\frac{dy}{ds},$$

il vient

$$o = E\,\delta\tau l + \int \frac{\mu y}{I}\,ds - q\left[\int \frac{y^2}{I}\,ds + \int \frac{\frac{dx}{ds}}{S}\left(\frac{dx}{ds} - \frac{1}{g}\frac{dy}{ds}\right)ds\right]$$
$$- \int \frac{N_\nu}{S}\,dx - \frac{1}{g}\int \frac{T_\nu}{S}\,dy;$$

d'où

$$(a) \qquad q = \frac{\int \frac{\mu y}{I}\,ds + E\,\delta\tau l - \int \frac{N_\nu}{S}\,dx - \frac{1}{g}\int \frac{T_\nu}{S}\,ds}{\int \frac{y^2}{I}\,ds + \int \frac{1}{S}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{1}{g}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]ds}.$$

Si l'on utilisait de même la première (A_1) du § 423 qui, au lieu de la compression de la fibre moyenne, introduit la somme $X_\nu + q$ des projections horizontales des forces agissant à la gauche de chaque section, X_ν étant l'expression connue à laquelle se réduirait cette somme si la poussée n'existait pas, en sorte que $X_\nu = o$ si les

charges sont verticales, on aurait

$$(b) \qquad q = \frac{\int \frac{\mu y}{I} ds + E\,\delta\tau l - \int \frac{X_v}{S} ds - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \int \frac{T_v}{S} ds}{\int \frac{y^2}{I} ds + \int \frac{ds}{S} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \int \frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{S} ds},$$

ou, en négligeant les quantités de l'ordre de l'effort tranchant et supposant que les charges sont verticales,

$$(c) \qquad q = \frac{\int \frac{\mu y}{I} ds + E\,\delta\tau l}{\int \frac{y^2}{I} ds + \int \frac{ds}{S}},$$

formule très simple et, en général, très suffisante dans la pratique.

Si la section est constante, cette formule devient

$$(c') \qquad q = \frac{\int \mu y\, ds + EI\,\delta\tau l}{\int y^2 ds + \frac{Is}{S}},$$

s étant la longueur de l'arc.

Si, au point de vue graphique, on remplace les intégrales par des sommes, on aura

$$(c_1) \qquad q = \frac{\sum \frac{\mu y}{I} + \frac{E\,\delta\tau l}{\Delta s}}{\sum \frac{y^2}{I} + \sum \frac{1}{S}};$$

et, si la section est constante, r étant son rayon de gyration, en sorte que $I = Sr^2$, il vient

$$(c_2) \qquad q = \frac{\Sigma \mu y + \frac{\delta\tau l}{\Delta s} \times ES \times r^2}{\Sigma y^2 + r^2}.$$

La formule (c_1) peut se mettre elle-même sous une forme plus commode. Soit

$$I = kI_0 = kS_0 r_0^2, \qquad S = k'S_0,$$

I_0, S_0, r_0 étant le moment d'inertie, l'aire et le rayon de gyration d'une section particulière arbitrairement choisie et k, k' deux

quantités purement numériques, variables d'une section à une autre. On aura

$$(c_3)\qquad q = \frac{\sum \frac{\mu y}{k} + \frac{\delta \tau l}{\Delta s} ES_0 \times r_0^2}{\sum \frac{y^2}{k} + r_0^2 \sum \frac{1}{k'}}.$$

§ 444.

MARCHE A SUIVRE DANS LA PRATIQUE POUR LA DÉTERMINATION APPROCHÉE DU SOLIDE D'ÉGALE RÉSISTANCE [1]. — Dans la pratique, on commence généralement par faire abstraction des effets possibles de la température, de ceux de la compression de la fibre moyenne et de l'effort tranchant; on suppose, en outre, la section de l'arc constante.

1° On détermine, dans ces conditions, une première valeur approchée q_0 de la poussée et, par suite, le moment de flexion produit dans chaque section par les charges fixes que l'arc peut avoir à supporter (§ 427).

2° On détermine de même le moment de flexion maximum que peuvent produire, dans chaque section, les charges mobiles s'il en existe (§ 429 et suivants).

3° On fait le total M de ces deux moments et, par la formule

$$\frac{Mu}{I} = R$$

(*voir* Note I, Ire Partie) on détermine le moment d'inertie I à donner à chaque section. Il sera convenable d'adopter pour la tension R une valeur un peu inférieure à celle qu'on ne veut pas dépasser. Ainsi, si l'on désire ne pas dépasser des tensions ou pressions de 6^{kg} par millimètre carré, il sera prudent, dans ce premier calcul, de prendre R égal, par exemple, à 5^{kg} seulement ou $4^{kg},5$ par millimètre carré, soit

$$R = 5 \times 10^6,$$

ou

$$R = 4,5 \times 10^6,$$

si le mètre est pris pour unité de longueur.

---

(1) *Voir* une autre méthode, Note I.

Ayant ainsi des valeurs approchées de I, la forme adoptée pour la section transversale donne les valeurs correspondantes de son aire S. Le polygone des pressions qu'on a tracé donne, en chaque point de la fibre moyenne, non seulement le moment de flexion, mais aussi la résultante de translation des forces élastiques agissant dans la section qui passe par ce point et, par suite, ses composantes N et T suivant la tangente et la normale à la fibre moyenne. On pourra donc vérifier si la tension ou pression des fibres extrêmes donnée par l'expression

$$\frac{Mv}{I} + \frac{N}{S}$$

et l'effort tranchant par unité de surface $\frac{T}{S}$ ne dépassent pas les valeurs que l'on veut adopter.

Si l'on juge nécessaire de faire une nouvelle vérification sur les valeurs ainsi obtenues pour I et S, on pourra recourir, pour la recherche de la poussée, à la formule (c_3) dont les sommes se construisent facilement (§ 428).

§ 445.

TABLES NUMÉRIQUES DE BRESSE POUR FACILITER LES CALCULS RELATIFS AUX ARCS CIRCULAIRES DE SECTION CONSTANTE POSÉS SUR ROTULES. — Notations. — φ, demi-angle d'ouverture de l'arc ou angle du rayon allant à une naissance avec le rayon vertical;

P, poids isolé agissant en un point quelconque de la fibre moyenne de l'arc;

θ, angle du rayon allant à ce point avec le rayon vertical;

p, charge uniforme par mètre courant de longueur d'arc ou de longueur de corde;

ρ, rayon de l'arc;

$2a = l$, ouverture de l'arc;

f, flèche de l'arc;

$P_0 = 2p\rho\varphi$, charge totale lorsque la charge p est uniformément répartie suivant l'arc;

$P_1 = pl = 2pa$, charge totale lorsqu'elle est uniformément répartie suivant la corde;

τ, température exprimée en degrés centigrades à partir de la température de pose;

δ, coefficient de dilatation;

q, valeur exacte de la poussée due à une cause quelconque (charges ou température);

q_0, valeur de première approximation de la poussée q, c'est-à-dire sa valeur, abstraction faite de la température, de l'effort tranchant et de la compression de la fibre moyenne, en sorte que

$$(a_0) \qquad q_0 = \frac{\int \mu y\, ds}{\int y^2\, ds}.$$

On posera

$$(1) \qquad q = q_0 \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}},$$

le multiplicateur de q étant un facteur de correction très voisin de l'unité. Dans ce multiplicateur, $r^2 = \frac{I}{S}$ est le carré du rayon de gyration de la section de l'arc, λ et λ' sont deux coefficients calculés dans les Tables et dont l'expression sera d'ailleurs donnée ci-après.

Table I. — Elle fournit le rapport $\frac{q_0}{P}$ de la poussée q_0, produite à une première approximation par un poids isolé P, à ce poids. La Table est à double entrée, puisque $\frac{q_0}{P}$ dépend de la demi-ouverture φ de l'arc et de la position du poids caractérisée par l'angle θ. Elle peut être calculée par la formule (9) du § 429 en y supposant I constant, en sorte que cette quantité disparaît, et en remplaçant l'ordonnée de l'arc par la valeur qui convient à la forme circulaire.

Cette Table permet ainsi de construire la ligne de poussée sans recourir à la construction du § 430.

Table II. — Elle donne :

Colonne 2. — Le rapport

$$C = \frac{q_0 a^2}{\delta\tau E S r^2} = \frac{q_0 a^2}{\delta\tau E I},$$

qui permet de trouver, à une première approximation, la poussée q_0 due à un changement de température.

On obtient ensuite une valeur plus exacte de la poussée q duc à la température par la formule

$$(2) \qquad q = \frac{q_0}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}},$$

λ' étant fourni par la Table III.

Colonne 3. — Elle donne le rapport

$$C' = \frac{q_0}{2p\rho\varphi} = \frac{q_0}{P_0}$$

de la poussée produite par une charge totale P_0 uniformément répartie suivant l'arc, à cette charge.

Colonne 4. — Elle donne le rapport analogue

$$C'' = \frac{q_0}{2pa} = \frac{q_0}{P_1},$$

pour une charge totale P_1 uniformément répartie suivant la corde.

Cette Table est à simple entrée. L'argument est φ ou plutôt le rapport $\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}}$ du demi-angle d'ouverture à l'angle droit.

Tables III et IV. — La Table III donne les valeurs des quantités λ et λ' qui entrent dans le coefficient de correction de la formule (1). La Table IV donne en bloc ces coefficients :

$$\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}.$$

La Table III est à simple entrée; les coefficients λ et λ' *qui y sont calculés* ne dépendent que de l'angle d'ouverture φ de l'arc et non des charges.

La Table IV est à double entrée; le coefficient de correction *qui y est calculé* dépend des deux arguments φ et $\frac{r^2}{a^2}$; mais les charges n'y entrent pas, de sorte que ces Tables III et IV peuvent être appliquées, quelles que soient les charges.

Mais cela n'est qu'approché en ce qui concerne le coefficient λ, et par suite le coefficient de correction de la Table IV.

En effet, les valeurs de λ et λ', quelles que soient les charges, peuvent être calculées exactement par la formule (a) du § 443.

En négligeant l'effort tranchant, et pour un arc de section constante, elle devient, en faisant $I = S r^2$,

$$q = \frac{\int \mu y \, ds - r^2 \int N r \, dx}{\int y^2 \, ds + r^2 \int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds},$$

en sorte que

$$\lambda = a^2 \frac{\int N r \, dx}{\int \mu y \, ds},$$

$$\lambda' = a^2 \frac{\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds}{\int y^2 \, ds}.$$

On voit que λ' ne dépend que de la forme de l'arc, c'est-à-dire, dans le cas de l'arc circulaire, de l'angle d'ouverture φ; au contraire, λ dépend en outre de la charge, c'est-à-dire de l'angle θ, si la charge se réduit à un poids unique P. Mais Bresse a montré que pour un arc donné, c'est-à-dire pour une valeur donnée de φ, ce coefficient varie peu avec θ et qu'en remplaçant sa valeur exacte par la valeur moyenne obtenue en supposant le poids placé au quart de la longueur de l'arc, on commet, sur la poussée, une erreur relative toujours moindre que $\frac{1}{1000}$ et le plus souvent inférieure à $\frac{1}{10^4}$. C'est pourquoi la Table III ne donne que la valeur moyenne de λ, laquelle, pour un arc donné, peut être adoptée, quelles que soient les charges agissantes. Elle ne dépend que de l'angle φ et, de même, la Table IV fournit une valeur moyenne, convenant à toutes les charges, du coefficient de correction complet.

La valeur de λ' de la Table III donne aussi la correction de la poussée résultant de la température, correction à faire par la formule (2) ci-dessus.

TABLE I. — *Rapport* $\frac{q_0}{P}$ *de la poussée* q_0 *due à un poids isolé* P [illegible]
à ce poids [illegible]

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $K = \frac{\theta}{\varphi}$.									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	[illegible]
0,12	4,125	4,112	4,075	4,012	3,926	3,816	3,682	3,526	3,348	[illegible]
0,13	3,804	3,793	3,758	3,700	3,621	3,519	3,396	3,251	3,087	[illegible]
0,14	3,529	3,518	3,486	3,432	3,359	3,264	3,150	3,016	2,863	[illegible]
0,15	3,291	3,281	3,251	3,200	3,132	3,043	2,936	2,811	2,669	[illegible]
0,16	3,082	3,072	3,044	2,997	2,933	2,862	2,749	2,632	2,498	[illegible]
0,17	2,897	2,888	2,862	2,817	2,757	2,679	2,584	2,474	2,348	[illegible]
0,18	2,733	2,725	2,700	2,657	2,600	2,526	2,437	2,333	2,214	[illegible]
0,19	2,586	2,578	2.554	2,514	2,460	2,390	2,305	2,206	2.094	[illegible]
0,20	2,453	2,446	2,423	2,385	2,334	2,267	2,187	2,093	1,985	[illegible]
0,21	2,333	2.326	2,304	2,268	2,219	2,156	2,079	1,989	1,887	[illegible]
0,22	2,224	2,217	2,196	2,162	2,115	2,054	1,981	1,895	1,798	[illegible]
0,23	2,124	2,117	2,098	2,064	2,019	1,961	1,891	1,809	1,716	[illegible]
0,24	2,032	2,026	2,007	1,975	1,932	1,876	1,809	1,730	1,641	[illegible]
0,25	1,947	1,941	1,923	1,893	1,851	1,798	1,733	1,658	1,572	[illegible]
0,26	1,869	1,863	1,846	1,817	1,777	1,725	1,663	1,590	1,508	[illegible]
0,27	1,797	1,791	1,774	1,746	1,707	1,658	1,598	1,528	1,448	[illegible]
0,28	1,729	1,724	1,708	1,680	1,643	1,595	1,537	1,470	1,393	[illegible]
0,29	1,666	1,661	1,645	1,619	1,583	1,537	1,481	1,415	1,341	[illegible]
0,30	1,607	1,602	1,587	1,561	1,527	1,482	1,428	1,365	1,293	[illegible]
0,31	1,552	1,547	1,533	1,508	1,474	1,431	1,378	1,317	1,248	[illegible]
0,32	1,500	1,491	1,481	1,457	1,424	1,389	1,332	1,372	1,205	[illegible]
0,33	1,452	1,447	1,433	1,410	1,378	1,337	1,288	1,230	1,165	[illegible]
0,34	1,406	1,401	1,388	1,365	1,334	1,294	1,246	1,190	1,127	[illegible]
0,35	1.362	1,358	1,344	1,322	1,292	1,254	1,207	1,153	1,091	[illegible]
0,36	1,321	1,317	1,304	1,282	1,253	1,215	1,170	1,117	1,057	[illegible]

point quelconque d'un arc circulaire de section constante, ière approximation).

PPORT $\frac{l\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $K = \frac{\theta}{\varphi}$.									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
,12	2,931	2,694	2,441	2,171	1,888	1,592	1,286	0,972	0,651	0,327
,13	2,702	2,484	2,250	2,001	1,740	1,467	1,185	0,895	0,600	0,301
,14	2,506	2,303	2,086	1,855	1,612	1,360	1,098	0,830	0,556	0,279
,15	2,335	2,146	1,943	1,728	1,502	1,266	1,023	0,772	0,517	0,259
,16	2,186	2,008	1,818	1,617	1,405	1,184	0,956	0,722	0,484	0,242
,17	2,054	1,887	1,708	1,518	1,319	1,112	0,898	0,678	0,454	0,227
,18	1,936	1,778	1,610	1,431	1,243	1,048	0,845	0,638	0,427	0,214
,19	1,830	1,681	1,521	1,352	1,175	0,990	0,799	0,603	0,403	0,202
,20	1,735	1,594	1,442	1,281	1,112	0,937	0,756	0,571	0,382	0,191
,21	1,649	1,514	1,370	1,217	1,057	0,890	0,718	0,542	0,362	0,181
,22	1,571	1,442	1,304	1,159	1,006	0,847	0,683	0,515	0,344	0,172
,23	1,499	1,376	1,244	1,105	0,959	0,807	0,651	0,491	0,328	0,164
0,24	1,433	1,315	1,189	1,056	0,916	0,771	0,621	0,468	0,313	0,157
0,25	1,372	1,259	1,138	1,010	0,876	0,737	0,594	0,448	0,299	0,149
0,26	1,315	1,207	1,091	0,968	0,839	0,706	0,569	0,428	0,286	0,143
0,27	1,263	1,158	1,047	0,929	0,805	0,677	0,545	0,411	0,274	0,137
0,28	1,214	1,114	1,006	0,892	0,773	0,650	0,523	0,394	0,263	0,131
0,29	1,169	1,072	0,968	0,858	0,744	0,625	0,503	0,379	0,253	0,126
0,30	1,126	1,032	0,932	0,826	0,716	0,601	0,484	0,364	0,243	0,121
0,31	1,086	0,995	0,899	0,796	0,690	0,579	0,466	0,350	0,234	0,116
0,32	1,049	0,961	0,867	0,768	0,665	0,558	0,449	0,337	0,225	0,112
0,33	1,013	0,928	0,837	0,742	0,642	0,539	0,433	0,325	0,217	0,108
0,34	0,980	0,897	0,809	0,716	0,620	0,520	0,418	0,314	0,209	0,104
0,35	0,948	0,868	0,782	0,693	0,599	0,502	0,403	0,303	0,202	0,100
0,36	0,918	0,840	0,757	0,670	0,579	0,486	0,390	0,292	0,195	0,097

Tabl

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $K = \frac{\theta}{\varphi}$.									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,4[illegible]
0,37	1,282	1,278	1,265	1,244	1,216	1,179	1,135	1,083	1,025	[illegible]
0,38	1,245	1,241	1,228	1,208	1,180	1,144	1,101	1,051	0,994	[illegible]
0,39	1,209	1,205	1,194	1,174	1,146	1,111	1,069	1,021	0,965	[illegible]
0,40	1,176	1,172	1,160	1,142	1,114	1,080	1,039	0,991	0,937	[illegible]
0,42	1,113	1,109	1,098	1,080	1,054	1,022	0,983	0,937	0,885	[illegible]
0,44	1,056	1,052	1,042	1,024	1,999	0,968	0,931	0,887	0,838	[illegible]
0,46	1,003	1,000	0,990	0,972	0,949	0,919	0,883	0,841	0,794	[illegible]
0,48	0,955	0,951	0,942	0,925	0,903	0,874	0,839	0,799	0,754	[illegible]
0,50	0,910	0,907	0,897	0,881	0,859	0,832	0,798	0,760	0,716	[illegible]
0,52	0,868	0,865	0,856	0,840	0,819	0,793	0,760	0,723	0,681	[illegible]
0,54	0,829	0,826	0,817	0,802	0,782	0,756	0,725	0,689	0,648	[illegible]
0,56	0,793	0,790	0,781	0,767	0,747	0,722	0,692	0,657	0,618	[illegible]
0,58	0,758	0,756	0,747	0,733	0,714	0,690	0,661	0,627	0,589	[illegible]
0,60	0,726	0,723	0,715	0,702	0,683	0,659	0,631	0,599	0,562	[illegible]
0,62	0,696	0,693	0,685	0,672	0,654	0,631	0,603	0,572	0,536	[illegible]
0,64	0,667	0,665	0,657	0,644	0,626	0,607	0,577	0,546	0,512	[illegible]
0,68	0,614	0,612	0,604	0,5[illegible]6	0,575	0,554	0,528	0,499	0,467	[illegible]
0,72	0,566	0,564	0,557	0,545	0,529	0,508	0,484	0,456	0,426	[illegible]
0,76	0,522	0,520	0,516	0,502	0,486	0,467	0,444	0,417	0,388	[illegible]
0,80	0,482	0,480	0,473	0,462	0,447	0,429	0,406	0,381	0,353	[illegible]
0,84	0,445	0,443	0,436	0,426	0,411	0,393	0,372	0,347	0,320	[illegible]
0,88	0,410	0,408	0,402	0,391	0,378	0,360	0,339	0,316	0,290	[illegible]
0,92	0,378	0,376	0,370	0,360	0,346	0,329	0,309	0,286	0,261	[illegible]
0,96	0,347	0,345	0,349	0,329	0,316	0,300	0,280	0,258	0,234	[illegible]
1,00	0,318	0,316	0,311	0,301	0,288	0,272	0,253	0,231	0,208	[illegible]

.)

PORT	RAPPORT $K = \frac{\theta}{\varphi}$.									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
,37	0,890	0,814	0,733	0,649	0,560	0,470	0,377	0,283	0,188	0,093
,38	0,863	0,789	0,711	0,628	0,543	0,454	0,364	0,273	0,181	0,090
,39	0,837	0,765	0,689	0,609	0,526	0,440	0,353	0,264	0,175	0,087
,40	0,812	0,742	0,668	0,590	0,509	0,426	0,341	0,256	0,170	0,084
,42	0,766	0,700	0,629	0,555	0,479	0,400	0,320	0,240	0,159	0,079
,44	0,724	0,661	0,594	0,524	0,451	0,377	0,301	0,225	0,149	0,074
,46	0,685	0,625	0,561	0,494	0,425	0,345	0,283	0,211	0,140	0,069
,48	0,650	0,592	0,531	0,467	0,401	0,334	0,266	0,198	0,131	0,065
,50	0,616	0,559	0,502	0,442	0,379	0,315	0,251	0,187	0,123	0,061
,52	0,585	0,532	0,476	0,418	0,358	0,297	0,236	0,176	0,115	0,057
,54	0,556	0,505	0,451	0,396	0,339	0,281	0,223	0,165	0,108	0,053
,56	0,529	0,480	0,428	0,375	0,320	0,265	0,210	0,155	0,102	0,050
,58	0,503	0,456	0,406	0,355	0,303	0,250	0,198	0,146	0,096	0,047
,60	0,479	0,433	0,385	0,336	0,285	0,236	0,186	0,137	0,090	0,044
,62	0,456	0,412	0,366	0,319	0,271	0,223	0,175	0,129	0,084	0,041
,64	0,434	0,391	0,347	0,302	0,256	0,210	0,165	0,121	0,078	0,038
,68	0,393	0,354	0,313	0,271	0,228	0,187	0,146	0,106	0,068	0,033
,72	0,356	0,319	0,281	0,242	0,203	0,165	0,128	0,092	0,059	0,028
,76	0,322	0,287	0,251	0,215	0,180	0,145	0,111	0,080	0,050	0,024
,80	0,291	0,258	0,224	0,191	0,158	0,126	0,096	0,068	0,042	0,019
,84	0,261	0,230	0,199	0,168	0,137	0,108	0,081	0,057	0,035	0,016
0,88	0,234	0,204	0,175	0,146	0,118	0,092	0,068	0,046	0,027	0,012
0,92	0,208	0,180	0,152	0,125	0,100	0,076	0,055	0,036	0,021	0,008
0,96	0,183	0,157	0,131	0,106	0,082	0,061	0,042	0,027	0,014	0,005
1,00	0,159	0,134	0,110	0,087	0,066	0,047	0,030	0,017	0,008	0,002

Table II. — *Coefficient de la partie principale de la poussée produite par un poids uniformément réparti sur l'arc entier suivant la longueur de la fibre moyenne ou suivant l'horizontale, et par une dilatation linéaire indépendante des charges.*

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT pour la dilatation C.	COEFFICIENT pour le poids uniformément réparti		RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT pour la dilatation C.	COEFFICIENT pour le poids uniformément réparti	
		suivant l'arc C'.	suivant l'horizontale C".			suivant l'arc C'.	suivant l'horizontale C".
0,12	208,8	2,635	2,641	0,37	20,0	0,804	0,825
0,13	177,6	2,429	2,436	0,38	18,8	0,780	0,802
0,14	152,8	2,253	2,261	0,39	17,8	0,757	0,779
0,15	132,8	2,100	2,108	0,40	16,8	0,735	0,758
0,16	116,4	1,965	1,974	0,42	15,0	0,694	0,718
0,17	102,9	1,847	1,856	0,44	13,5	0,657	0,681
0,18	91,5	1,741	1,751	0,46	12,2	0,622	0,648
0,19	81,9	1,647	1,657	0,48	11,0	0,590	0,617
0,20	73,7	1,562	1,573	0,50	10,0	0,561	0,589
0,21	66,6	1,484	1,496	0,52	9,1	0,533	0,562
0,22	60,5	1,414	1,426	0,54	8,3	0,507	0,537
0,23	55,2	1,349	1,362	0,56	7,6	0,483	0,514
0,24	50,5	1,290	1,304	0,58	6,9	0,460	0,492
0,25	46,3	1,236	1,250	0,60	6,3	0,439	0,472
0,26	42,7	1,185	1,200	0,62	5,8	0,418	0,453
0,27	39,4	1,138	1,153	0,64	5,3	0,399	0,435
0,28	36,5	1,095	1,110	0,68	4,5	0,364	0,401
0,29	33,9	1,054	1,070	0,72	3,8	0,331	0,371
0,30	31,5	1,016	1,033	0,76	3,3	0,301	0,343
0,31	29,4	0,980	0,998	0,80	2,8	0,273	0,317
0,32	27,4	0,947	0,964	0,84	2,4	0,248	0,293
0,33	25,7	0,915	0,933	0,88	2,0	0,224	0,271
0,34	24,0	0,885	0,904	0,92	1,70	0,201	0,251
0,35	15,6	0,857	0,876	0,96	1,50	0,180	0,231
0,36	21,2	0,830	0,850	1,00	1,30	0,155	0,212

Table III. — *Valeurs des coefficients λ et λ' pour la correction des poussées q_0 produites par des poids ou par une dilatation.*

N. B. — On donne seulement ici la valeur moyenne de λ, correspondant à chaque angle φ.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	λ.	λ'.	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	λ.	λ'.
0,12	2,44	207,55	0,37	2,20	18,91
0,13	2,43	176,33	0,38	2,19	17,78
0,14	2,43	151,55	0,39	2,17	16,72
0,15	2,42	131,57	0,40	2,16	15,76
0,16	2,42	115,22	0,42	2,13	14,02
0,17	2,41	101,67	0,44	2,10	12,52
0,18	2,40	90,32	0,46	2,07	11,22
0,19	2,40	80,71	0,48	2,03	10,08
0,20	2,39	72,51	0,50	2,00	9,09
0,21	2,38	65,44	0,52	1,97	8,20
0,22	2,37	59,33	0,54	1,93	7,42
0,23	2,36	54,00	0,56	1,89	6,73
0,24	2,35	49,32	0,58	1,86	6,12
0,25	2,34	45,19	0,60	1,82	5,56
0,26	2,33	41,53	0,62	1,78	5,07
0,27	2,32	38,29	0,64	1,74	4,63
0,28	2,31	35,37	0,68	1,66	3,86
0,29	2,30	32,75	0,72	1,58	3,24
0,30	2,29	30,39	0,76	1,50	2,73
0,31	2,28	28,27	0,80	1,41	2,30
0,32	2,27	26,33	0,84	1,33	1,95
0,33	2,25	24,57	0,88	1,25	1,65
0,34	2,14	22,96	0,92	1,16	1,40
9,35	2,23	21,49	0,96	1,08	1,20
0,36	2,22	20,15	1,00	1,00	1,00

Table IV. — *Coefficients de correction qui doivent affecter la partie principale de la poussée produite par des poids quelconques.*

(Ce coefficient est l'unité quand l'argument $\frac{r^2}{a^2}$ devient nul.)

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	RAPPORT $\frac{r^2}{a^2}$. 0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{r^2}{a^2}$. 0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025
0,12	0,905	0,826	0,760	0,703	0,654	0,37	0,989	0,979	0,969	0,959	0,950
0,13	0,918	0,848	0,788	0,736	0,690	0,38	0,990	0,980	0,971	0,961	0,953
0,14	0,928	0,866	0,812	0,764	0,721	0,39	0,991	0,981	0,972	0,963	0,955
0,15	0,937	0,882	0,832	0,788	0,748	0,40	0,991	0,983	0,974	0,965	0,957
0,16	0,944	0,895	0,850	0,809	0,772	0,42	0,992	0,984	0,976	0,969	0,961
0,17	0,951	0,906	0,865	0,827	0,793	0,44	0,993	0,986	0,978	0,972	0,965
0,18	0,956	0,915	0,877	0,843	0,811	0,46	0,993	0,987	0,980	0,974	0,968
0,19	0,960	0,923	0,889	0,857	0,827	0,48	0,994	0,988	0,982	0,976	0,970
0,20	0,964	0,930	0,899	0,869	0,841	0,50	0,995	0,989	0,984	0,978	0,973
0,21	0,967	0,936	0,907	0,880	0,854	0,52	0,995	0,990	0,985	0,980	0,975
0,22	0,970	0,942	0,915	0,890	0,866	0,54	0,995	0,991	0,986	0,982	0,977
0,23	0,973	0,947	0,922	0,898	0,876	0,56	0,996	0,991	0,987	0,983	0,979
0,24	0,975	0,951	0,928	0,906	0,885	0,58	0,996	0,992	0,988	0,984	0,980
0,25	0,977	0,955	0,933	0,913	0,893	0,60	0,996	0,993	0,989	0,985	0,982
0,26	0,978	0,958	0,938	0,919	0,901	0,62	0,997	0,993	0,990	0,986	0,983
0,27	0,980	0,961	0,942	0,925	0,907	0,64	0,997	0,994	0,991	0,987	0,984
0,28	0,981	0,964	0,946	0,930	0,913	0,68	0,997	0,994	0,992	0,989	0,986
0,29	0,983	0,966	0,950	0,934	0,919	0,72	0,998	0,995	0,993	0,990	0,988
0,30	0,984	0,968	0,953	0,938	0,924	0,76	0,998	0,996	0,994	0,992	0,990
0,31	0,985	0,970	0,956	0,942	0,929	0,80	0,998	0,996	0,995	0,993	0,991
0,32	0,986	0,972	0,959	0,946	0,933	0,84	0,998	0,997	0,995	0,993	0,992
0,33	0,987	0,974	0,961	0,949	0,937	0,88	0,999	0,997	0,996	0,994	0,993
0,34	0,988	0,975	0,963	0,952	0,940	0,92	0,999	0,997	0,996	0,995	0,994
0,35	0,988	0,977	0,966	0,955	0,944	0,96	0,999	0,998	0,997	0,995	0,994
0,36	0,989	0,978	0,967	0,957	0,947	1,00	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995

CHAPITRE II.

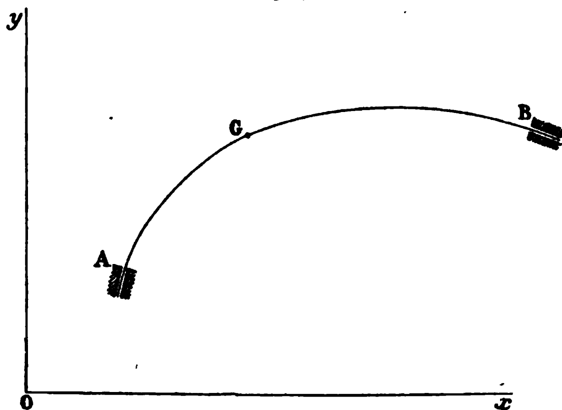
ARCS ENCASTRÉS AUX DEUX EXTRÉMITÉS.

§ 446.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si, aux divers éléments ds d'un arc de section et d'élasticité constantes ou variables, soumis à des charges quelconques (verticales ou non) et encastré aux deux extrémités, on applique des forces fictives* $\frac{M}{EI}$ *ds, parallèles à une direction fixe arbitrairement choisie, dans un sens convenu ou en sens contraire suivant que* M *est positif ou négatif, ces forces sont en équilibre* astatique (*c'est-à-dire qu'elles sont en équilibre quelque direction qu'on leur donne*) (¹).

En effet, soit AB la fibre moyenne de l'arc considéré (*fig.* 48).

Fig. 48.



Rapportons-le à deux axes de coordonnées rectangulaires quelconques. Les composantes u_0 et v_0 du déplacement du point A

(¹) Ce théorème suppose qu'on néglige l'effort tranchant et la compression de la fibre moyenne.

sont nulles, ainsi que la rotation Ω_0 de la section passant par ce point. Par suite, les équations (A′) du § 423 donnent, pour les composantes u et v du déplacement d'un point quelconque G,

$$(1)\qquad \begin{cases} u = -y\displaystyle\int_0^s \frac{M}{EI}\,ds + \int_0^s \frac{M}{EI}\,y\,ds, \\ v = +x\displaystyle\int_0^s \frac{M}{EI}\,ds - \int_0^s \frac{M}{EI}\,x\,ds, \end{cases}$$

et, pour la rotation Ω de la section faite en ce point,

$$(2)\qquad \Omega = -\int_0^s \frac{M}{EI}\,ds.$$

Si l'on applique ces formules au point B, quelle que soit sa position, on a, par hypothèse, en ce point,

$$\Omega = 0, \qquad u = v = 0:$$

on aura donc les trois équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{M}{EI}\,ds = 0, \\ \displaystyle\int \frac{M\,ds}{EI}\,x = 0, \\ \displaystyle\int \frac{M\,ds}{EI}\,y = 0, \end{cases}$$

où les intégrations sont à effectuer dans toute la longueur de l'arc.

Les deux premières expriment que les forces $\frac{M\,ds}{EI}$ sont en équilibre si on les suppose parallèles à l'axe des y; la première et la troisième, qu'elles sont en équilibre si on les suppose parallèles à l'axe des x, et les trois réunies, qu'elles sont en équilibre pour ces deux directions, et par suite pour toute direction qui leur serait attribuée.

§ 447.

CAS PARTICULIERS DU THÉORÈME FONDAMENTAL. — 1° Si l'arc considéré est d'élasticité constante, qu'il soit de section constante ou variable, le théorème s'applique aux forces fictives $\frac{M\,ds}{I}$ et son ex-

pression analytique devient

$$(3') \qquad o = \int \frac{M\,ds}{I} = \int \frac{M\,ds}{I} x = \int \frac{M\,ds}{I} y.$$

2° S'il est, en outre, de section constante, le théorème s'applique aux forces fictives $M\,ds$ et les équations ci-dessus deviennent

$$(3'') \qquad o = \int M\,ds = \int Mx\,ds = \int My\,ds.$$

3° Dans l'étude des poutres droites et des arcs articulés en leurs extrémités, on commence, dans la pratique, par supposer la section constante, sauf à déterminer ensuite les moments d'inertie I de façon que la pièce soit d'égale résistance, ce qui exige qu'ils varient d'une section à une autre.

On peut ensuite, adoptant les valeurs ainsi obtenues, faire, si on le veut, une nouvelle détermination des moments de flexion en ayant égard à la variabilité du moment d'inertie.

Dans le cas d'un arc encastré à ses extrémités, au lieu de faire les premières déterminations en supposant I constant, on peut aussi les faire en supposant $I\cos\theta$ constant, θ désignant l'angle que la tangente à l'arc fait avec l'horizontale.

Cette seconde hypothèse est plus voisine de la réalité que la première.

En effet, dans un arc encastré à ses extrémités, le moment d'inertie I, comme nous le verrons, va en croissant depuis le sommet de l'arc jusqu'à ses naissances.

Comme $\cos\theta$ va, au contraire, en décroissant du sommet aux naissances, le produit $I\cos\theta$ est plus voisin de la constance que le facteur I.

Il en serait autrement dans un arc posé sur tourillons. Là, il est rationnel de donner, comme on l'a fait pour la première fois au pont du Douro (*voir* Note I) et depuis, au viaduc de Garabit, une section décroissante du sommet aux naissances.

Et comme $\cos\theta$ décroît aussi dans cet intervalle, le produit $I\cos\theta$ décroît plus vite que I; il est donc préférable, dans ce cas, de faire les premières déterminations dans l'hypothèse $I = \text{const.}$ que dans celle $I\cos\theta = \text{const.}$

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, l'axe des x horizontal,

en sorte que

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds},$$

et nous poserons

$$\mathrm{I}\cos\theta = \mathrm{I}\frac{dx}{ds} = \mathrm{I}'.$$

Si l'on introduit I' au lieu de I dans les équations (3'), elles deviennent

$$(4) \qquad 0 = \int \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}'}\,dx = \int \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}'}\,x\,dx = \int \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}'}\,y\,dx,$$

et, si l'on suppose I' constant, on aura

$$(4') \qquad 0 = \int \mathrm{M}\,dx = \int \mathrm{M}x\,dx = \int \mathrm{M}y\,dx.$$

Ce sont les forces $\mathrm{M}\,dx$ qui sont en équilibre astatique, au lieu que ce sont les forces $\mathrm{M}\,ds$ qui jouissent de cette propriété, si c'est le moment d'inertie I qui est supposé constant.

§ 448.

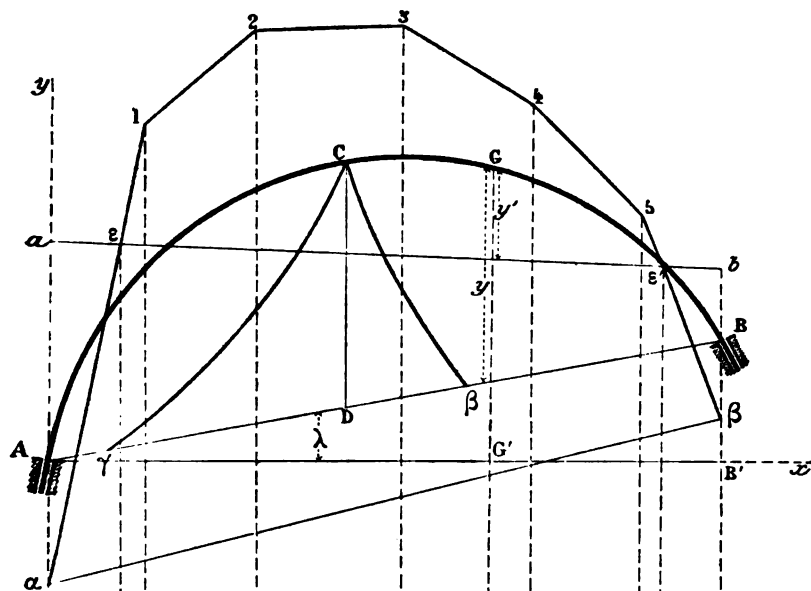
POUTRE CORRESPONDANTE A UN ARC ENCASTRÉ. — Considérons toujours l'arc AB (*fig.* A, p. 67) quelconque, de section constante ou variable ; mais supposons-le soumis uniquement à des charges verticales. Projetons sa corde AB sur une horizontale quelconque, par exemple, sur l'axe des x en AB' et soit G' la projection d'un point quelconque G de la fibre moyenne.

Concevons une poutre droite dont la fibre moyenne soit AB', encastrée à ses deux extrémités A et B', soumise aux mêmes charges que l'arc donné et telle que son moment d'inertie au point G' soit $\mathrm{I}' = \mathrm{I}\frac{dx}{ds}$, I étant le moment d'inertie au point G.

Nous dirons, pour abréger, que AB' est la poutre droite *correspondante* à l'arc AB ; le point G' sera dit le *correspondant* ou la *projection* de G.

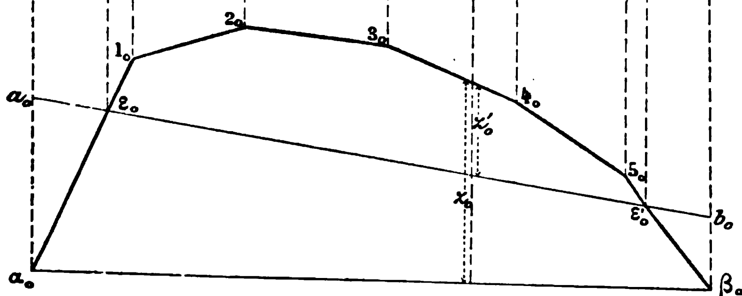
On voit que, dans l'hypothèse $\mathrm{I}\frac{dx}{ds} = \mathrm{I}' = \text{const.}$, la poutre correspondante à un arc est de section constante. Dans tout autre cas, elle est de section variable.

Fig. A.



y
1
2
3
4
5
C
G
y'
a
ε
b
y
ε'
B
β
D
β
λ
A
γ
G'
B'
x
α

Fig. A_0.



1_0
2_0
3_0
4_0
5_0
a_0
ε_0
x'_0
x_0
ε'_0
b_0
α_0
β_0

§ 449.

MÉTHODE D'EDDY. — La méthode d'Eddy, appliquée à un arc encastré à ses deux extrémités, comporte quatre opérations principales :

1° Détermination des moments de flexion M′ que les charges agissant sur l'arc produiraient dans la poutre droite correspondante;

2° Tracé d'une certaine droite que nous appellerons *la ligne de fermeture* de l'arc et qui fournit deux points du polygone des pressions;

3° Détermination de la distance polaire de ce polygone (ou poussée de l'arc).

4° Tracé de ce même polygone.

Détermination du moment de flexion M′. — Construisons (*fig.* A_0) un polygone funiculaire quelconque des charges données.

Soit $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$ ce polygone terminé aux verticales des deux extrémités de la fibre moyenne, de sorte que $\alpha_0\beta_0$ est la corde du polygone. Soit q_0 sa distance polaire arbitrairement choisie.

Déterminons les moments de flexion de la poutre fictive AB′ sous l'influence des charges données.

Pour cela, il suffit de déterminer la ligne de fermeture $a_0 b_0$ du polygone funiculaire. Si l'on suppose $I' = I\frac{dx}{ds}$ constant, c'est-à-dire si la poutre fictive est de section constante, on appliquera la méthode exposée au § 335.

Dans le cas contraire, on y apportera la modification indiquée au § 338.

Dans tous les cas, si z'_0 désigne l'ordonnée que la verticale d'un point quelconque G′ de la poutre détermine entre le polygone et la ligne de fermeture $a_0 b_0$, le moment de flexion M′ au point G′ sera

$$M' = q_0 z'_0. \qquad (5)$$

Et comme le moment de flexion dans une poutre encastrée à ses

extrémités satisfait (§ 334) aux deux équations

$$(6)\qquad \int \frac{M' dx}{I'} = 0, \qquad \int \frac{M' x\, dx}{I'} = 0,$$

I' désignant le moment de flexion constant ou variable de la section de la poutre, on aura aussi identiquement

$$(6')\qquad \int \frac{z'_0\, dx}{I'} = 0, \qquad \int \frac{z'_0\, x\, dx}{I'} = 0$$

ou

$$(6'')\qquad \int \frac{z'_0\, ds}{I} = 0, \qquad \int \frac{z'_0\, x\, ds}{I}.$$

Les forces fictives verticales $\frac{z'_0\, ds}{I}$ ou $\frac{z'_0\, dx}{I'}$ sont en équilibre.

2° **Détermination de la ligne de fermeture de l'arc.** — Ceci posé, soit (*fig.* A) $\alpha 1.2.3.4.5 \beta$ le polygone des pressions supposé pour un instant connu. Par les points ε_0 et ε'_0 (*fig.* A_0) où la ligne de fermeture $a_0 b_0$ du polygone funiculaire $\alpha_0 1_0 \ldots \beta_0$ coupe ce polygone, menons des verticales jusqu'à leurs rencontres en ε et ε' avec le polygone des pressions (*fig.* A). Joignons les points ε et ε'; on obtiendra une droite qui coupe les verticales des appuis en a et b. C'est cette droite ab que nous appellerons *la ligne de fermeture de l'arc*. Si on la connaissait, on en déduirait les points ε et ε' par son intersection avec les vertieales de ε_0 et ε'_0, et l'on connaîtrait ainsi deux points du polygone des pressions. Il ne resterait donc, pour pouvoir le tracer, qu'à en déterminer la distance polaire. Cette distance, qui n'est autre que la poussée de l'arc, nous la désignerons par la lettre q. Alors (§ 198) le moment de flexion M en un point de l'arc est donné par la formule

$$(7)\qquad M = q\zeta,$$

ζ désignant les portions d'ordonnées comprises entre le polygone des pressions et l'arc, ces portions d'ordonnées comptées positivement ou négativement suivant que le polygone est extérieur ou intérieur à l'arc.

Soient respectivement z' et y' les ordonnées des points du polygone et de l'arc comptées depuis la droite cherchée ab, en sorte

que

$$\zeta = z' - y'$$

et

$$M = q(z' - y') = qz' - qy'.$$

Mais, en vertu des propriétés des polygones funiculaires des forces parallèles (§ 43 *bis*), on a

$$(7') \qquad qz' = q_0 z'_0.$$

Donc

$$(7'') \qquad M = q_0 z'_0 - qy' = M' - qy'.$$

Mais le moment de flexion M doit satisfaire aux conditions (3)

$$\int \frac{M}{I'} dx = 0,$$

$$\int \frac{M}{I'} x\, dx = 0,$$

$$\int \frac{M}{I'} y\, dx = 0.$$

les intégrations étant à faire de $x = 0$ à $x = AB' = l$.

Si l'on remplace dans les deux premières M par sa valeur (7'), on aura, à cause de (6'),

$$(8) \qquad \begin{cases} \int \frac{y'}{I'} dx = 0, \\ \int \frac{y'}{I'} x\, dx = 0, \end{cases}$$

équations où la poussée q n'entre pas.

Ces deux équations sont pareilles à celles (6'); la lettre y' y entre de la même manière que, dans ces dernières, la lettre z'_0. Sa signification est, par suite, celle-ci :

Si, à la poutre AB' on applique, non plus des charges verticales admettant le polygone $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$ pour polygone funiculaire, mais des charges verticales fictives admettant l'*arc donné* ACB pour *courbe funiculaire*, la droite cherchée *ab* n'est autre que *la ligne de fermeture* de cette courbe funiculaire. C'est ce qui justifie son nom.

On la déterminera donc exactement, comme on a déterminé celle $a_0 b_0$.

Pour le faire graphiquement, on remplacera l'arc ACB par un polygone inscrit d'un plus ou moins grand nombre de côtés suivant le degré d'approximation que l'on veut obtenir. Ce polygone étant cousidéré comme un polygone funiculaire de forces fictives (qu'il n'est pas nécessaire de déterminer), la corde AB y remplit le même rôle que celle $\alpha_0\beta_0$ dans la recherche 1° et la ligne de fermeture ab se trouve, comme celle $a_0 b_0$, par les méthodes graphiques développées à l'occasion des poutres droites encastrées à leurs extrémités.

3° Recherche de la poussée q. — Enfin, en portant la valeur 7″ de M dans la dernière des équations (6), on aura

$$(9)\qquad \int \frac{M'}{I'} y\, dx = q \int \frac{y'}{I'} y\, dx$$

ou, en introduisant le moment d'inertie $I = I' \frac{dx}{ds}$,

$$(9')\qquad q = \frac{\int \frac{M'\, dx}{I'} y}{\int \frac{y'\, dx}{I'} y};$$

les intégrales étant toujours à effectuer dans toute l'étendue de l'arc, soit de o à l.

Cette équation peut encore s'écrire

$$(9'')\qquad q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0\, dx}{I'} y}{\int \frac{y'\, dx}{I'} y}.$$

Les ordonnées z' et y' étant connues par la solution des questions 1° et 2°, cette formule fournit la poussée. On voit que son expression est analogue à celle obtenue dans le cas d'un arc posé sur rotules et la construction graphique reste la même.

Si la corde AB est horizontale ou coïncide avec l'axe des x, le numérateur de l'expression de q représente la somme des moments relativement au point A de forces horizontales

$$\frac{z'_0\, dx}{I'} = \frac{z_0\, ds}{I},$$

appliquées aux divers éléments ds de l'arc et le dénominateur a la même signification pour des forces $\frac{y'\,ds}{I}$.

Si la corde AB est inclinée sur l'axe des x, que λ soit son coefficient d'inclinaison et y_1 l'ordonnée verticale du point quelconque G de l'arc comptée depuis la corde, x étant l'abscisse de ce point, on aura

$$y = y_1 - x \operatorname{tang}\lambda$$

et

$$\int \frac{z'_0\,ds}{I} y = \int \frac{z'_0\,ds}{I} y_1 - \operatorname{tang}\lambda \int \frac{z'_0}{I'} x\,dx,$$

et comme la dernière intégrale est nulle en vertu de (6'), on a

$$\int \frac{z'_0\,ds}{I} y = \int \frac{z'_0\,ds}{I} y_1.$$

On a de même, à cause de (6'),

$$\int \frac{y'\,ds}{I} y = \int \frac{y'\,ds}{I} y_1.$$

Donc on peut encore écrire

$$q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0\,ds}{I} y_1}{\int \frac{y'\,ds}{I} y_1}.$$

Soit p la longueur de la perpendiculaire abaissée du point G sur la corde.

On a

$$y_1 = \frac{p}{\cos\lambda}.$$

Donc

$$q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0\,ds}{I} p}{\int \frac{y'\,ds}{I} p},$$

et l'on voit que, si aux éléments ds on applique des forces égales à $\frac{z'_0\,ds}{I}$, toutes parallèles à la corde AB, le numérateur représente la somme des moments de ces forces par rapport au point A, et le dénominateur représente la somme analogue pour des forces $\frac{y'\,ds}{I}$ appliquées pareillement à AB.

Soit CD la verticale du sommet de l'arc, c'est-à-dire du point où la tangente à l'arc est parallèle à la corde AB.

Portons, comme dans le cas de l'arc posé sur rotules, les forces $\frac{z'_0\,ds}{I}$ en polygone des forces à partir de D, par exemple, dans le sens DA pour celles qui se rapportent à des valeurs positives de z'_0, et en sens contraire pour celles qui se rapportent à des valeurs négatives de cette lettre, et, prenant le point C comme pôle et aussi comme point de départ, traçons la courbe funiculaire de ces forces. Soit γ le point où elle coupe la corde.

De même, portons les forces $\frac{y'\,ds}{I}$ en polygone des forces sur la droite DB, et soit $C\beta$ leur courbe funiculaire de pôle C.

D'après le théorème des moments (§ 119), les intégrales

$$\int \frac{z'_0\,ds}{I} \quad \text{et} \quad \int \frac{y'_0\,ds}{I}$$

sont respectivement proportionnelles aux longueurs $D\gamma$ et $D\beta$ et, par suite,

$$q = q_0\,\frac{D\gamma}{D\beta}.$$

La poussée q s'obtient donc par la construction d'une quatrième proportionnelle.

Remarque. — Cette quatrième proportionnelle se construirait comme au § 426. On peut aussi éviter de la construire, car la distance polaire q_0 étant arbitraire, si on la prend égale à $D\beta$, on a directement

$$q = D\gamma.$$

Dans la pratique on remplacera, comme on l'a fait pour l'arc posé sur rotules, les intégrales par des sommes et les deux courbes funiculaires par deux polygones funiculaires.

De même, si l'arc ACB est trop surbaissé, on ne change pas le résultat en amplifiant toutes les ordonnées dans un même rapport (§ 426, *Rem. II*).

Il y a toutefois une différence entre la construction actuelle et celle relative à l'arc posé sur rotules. Dans ce dernier cas, les

forces à considérer étaient celles $\frac{z_0\,ds}{I}$, $\frac{y\,ds}{I}$, où z_0 et y représentaient les ordonnées du polygone funiculaire et de l'arc comptées depuis leurs cordes respectives $\alpha_0\beta_0$ et AB; par suite, toutes ces ordonnées étaient positives et les forces $\frac{z_0\,ds}{I}$ et $\frac{y\,ds}{I}$ étaient toutes de même sens. Ici, il n'en est plus ainsi. Certaines de ces forces sont dans un sens et d'autres en sens opposé, suivant les signes des z'_0 et y'.

4° **Construction du polygone des pressions.** — L'équation (7'), c'est-à-dire

$$q z' = q_0 z'_0,$$

donne

$$z' = \frac{q_0}{q} z'_0.$$

Ainsi, pour avoir le polygone des pressions, on amplifiera les ordonnées z'_0 (*fig.* A_0) dans le rapport connu $\frac{q_0}{q}$ et l'on portera ces ordonnées amplifiées à partir de la ligne de fermeture *ab* (*fig.* A) de l'arc.

§ 450.

RÉSUMÉ DES OPÉRATIONS. — On peut, dans la pratique, modifier un peu l'ordre des opérations, en commençant par celles qui sont indépendantes des charges et qui, par suite, ne sont à faire qu'une seule fois, même quand on veut étudier les effets produits sur l'arc par des charges de natures diverses.

On est alors amené à procéder ainsi :

1° **Tracé de la ligne de fermeture de l'arc.** — Cette ligne est définie par ce que des forces verticales égales ou proportionnelles à $\frac{y'}{I'}dx$ appliquées à l'arc doivent se faire équilibre, y' étant les ordonnées de l'arc comptées depuis la ligne cherchée. Si I' est regardé comme une constante, ce sont des forces égales ou proportionnelles à $y'\,dx$ qui doivent se faire équilibre.

Or, si l'on appelle y les ordonnées de l'arc comptées depuis sa corde, il faut alors que la résultante des forces descendantes $y\,dx$, résultante qui est égale à l'aire ACB et appliquée suivant la verticale du centre de gravité de cette aire, soit équilibrée par deux

forces ascendantes appliquées au tiers et aux deux tiers de la corde et représentant (*fig.* A, p. 67) les aires des triangles A*ab*.

Si I′ est variable, il faut procéder sur les triangles amplifiés et AB*b* dans lesquels on peut décomposer le trapèze AB*ab*. Ces deux forces sont par là déterminées (§ 338).

Si l'arc AB est de structure symétrique par rapport à la verticale CD, il est clair que *ab* sera horizontal par raison de symétrie.

Plus généralement, si CD est un diamètre de l'arc ACB, conjugué à la corde AB, et si les sections placées aux deux extrémités de chaque corde parallèle à AB sont identiques, la ligne AB sera parallèle à la corde AB.

2° **Tracé du polygone funiculaire C β des forces fictives $\frac{y' ds}{I}$ parallèles à la corde** AB. — (Comme au § 449, 3°.)

3° **Tracé du polygone funiculaire $\alpha_0 \beta_0$ (*fig.* A_0) des charges données.** — On pourra prendre la distance polaire

$$q_0 = D\beta.$$

4° **Tracé de la ligne de fermeture $a_0 b_0$ de ce polygone.** — Opération analogue à celle 1°.

Si I′ est constant, on a à équilibrer une force verticale descendante égale à l'aire du polygone funiculaire par deux forces ascendantes placées au tiers et aux deux tiers de la corde.

Si I′ est variable, on procède comme au § 338.

5° **Tracé de la courbe funiculaire C γ des forces $\frac{z'_0 ds}{I}$ parallèles à** AB.

6° On a alors pour la poussée

$$q = q_0 \frac{D\gamma}{D\beta},$$

soit $q = D\gamma$ si l'on a pris $q_0 = D\beta$.

7° **Amplification des ordonnées z'_0 des sommets du polygone funiculaire $\alpha_0 \beta_0$ dans le rapport connu**

$$\frac{q_0}{q} = \frac{D\beta}{D\gamma}.$$

8° **Report des ordonnées amplifiées à partir de** *ab*, ce qui fournit le polygone des pressions.

§ 451.

APPLICATION A UN ARC SYMÉTRIQUE DANS LEQUEL I' EST REGARDÉ COMME CONSTANT. — Reprenons l'arc ACB déjà considéré (*Pl. XXXIII*, *fig.* A); mais, au lieu de le regarder comme posé sur rotules, regardons-le comme encastré à ses extrémités A et B, et supposons, de plus, que le moment d'inertie I de sa section croisse du sommet aux naissances de façon que le produit $I\frac{dx}{ds} = I'$ soit constant.

La fibre moyenne, qui a 160^m de portée et $42^m,50$ de flèche, est reproduite (*fig.* A, *Pl. XXXIV*).

La corde AB est horizontale et la courbe elle-même est supposée symétrique par rapport à la verticale CD de son sommet C. (C'est, en réalité, un arc de cercle; mais les constructions qui suivent ne lui supposent aucune forme particulière.)

1° **Tracé de la ligne de fermeture de l'arc.** — La ligne de fermeture *ab* est ici horizontale, par raison de symétrie.

Une force descendante égale à l'aire de l'arc ACB doit être équilibrée par une force ascendante égale à l'aire du rectangle AB*ab*.

Il faut et il suffit pour cela que ces deux aires soient égales.

S'il s'agissait d'un arc parabolique, la hauteur A*a* du rectangle serait les deux tiers de la flèche de l'arc.

On pourrait aussi profiter de ce que l'arc est circulaire pour trouver la hauteur A*a*. Mais, quel que soit l'arc, on procédera ainsi.

Divisons la *corde* AB en un certain nombre de parties égales à Δx.

Nous adoptons seize parties.

Soient

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_7$$

les ordonnées des points de division.

L'aire ACD sera sensiblement

$$\text{ACD} = \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_7\right)\Delta x,$$

et comme

$$\Delta x = \frac{\text{AB}}{16} = \frac{l}{16}$$

et que la moitié du rectangle a pour aire $Aa \times \frac{l}{2}$, on aura

$$Aa \times \frac{l}{2} = \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_7\right)\frac{l}{16},$$

d'où

$$Aa = \frac{1}{8}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_7\right),$$

ce qui détermine la ligne *ab*.

2° **Tracé du polygone funiculaire** Dβ. — On doit à présent, aux divers éléments ds de l'arc, supposer appliquées les forces horizontales proportionnelles à $\frac{y'\,ds}{I} = \frac{y'\,dx}{I'}$, ou, comme I' est constant, des forces proportionnelles à $y'\,dx$.

On appliquera aux points de division de l'arc des forces proportionnelles à $y'\,\Delta x$, ou, comme Δx est constant, des forces proportionnellss aux ordonnées y' des points de divisions comptées depuis la ligne *ab*.

Désignons par c_1, c_2, ..., c_7 les points déterminés sur l'arc par les verticales des points de division de la demi-corde AD, et par b_1, b_2, ..., b_7 les points analogues déterminés par les verticales des points de division de la demi-corde DB.

En raison du surbaissement de l'arc, il ne serait pas commode de lui appliquer des forces horizontales. Doublons les ordonnées y_i des points de division comptées depuis la corde AB. Soient b'_i et c'_i les points ainsi obtenus.

Au lieu d'appliquer des forces proportionnelles aux ordonnées y'_i des points b_i et c_i comptées depuis *ab* à ces points eux-mêmes, nous pouvons les appliquer aux points b'_i et c'_i. De plus, comme l'arc est symétrique, nous n'opérons que sur l'une de ses moitiés, par exemple sur celle CB remplacée par C'B à cause de l'amplification des ordonnées.

Observons enfin que les ordonnées y'_i de l'arc comptées depuis *ab* sont les unes positives, les autres négatives : que les forces $y'\,dx$ que l'on devrait considérer si l'on opérait rigoureusement se font équilibre si on les suppose verticales (c'est par cette condition qu'est tracée la ligne *ab*). Donc, leur somme algébrique est nulle et, placées horizontalement, elles forment un couple.

La somme de leurs moments est donc constante relativement à tous les points du plan et, au lieu de chercher cette somme de moments relativement à un point A de la corde AB, on peut la chercher relativement à tout autre point, si cela est plus commode graphiquement.

Par le point C′ dont l'ordonnée est double de celle du sommet C de l'arc, menons une horizontale A′C′B′. Portons les forces proportionnelles aux ordonnées y'_i, en polygone des forces sur C′B′, en dirigeant celles qui répondent à des valeurs positives de y' dans le sens C′B′, les autres en sens contraire. Ici on a pris ces forces doubles des y'_i, soit égales aux ordonnées des points b'_i comptées depuis la ligne $a'\,b'$ dont l'ordonnée est

$$\mathrm{A}a' = 2\mathrm{A}a.$$

Si l'on procédait rigoureusement, comme les forces considérées forment un couple, le polygone devrait se fermer, c'est-à-dire qu'on devrait revenir au point de départ C′.

La distance, au point C′, du point d'arrivée du polygone des forces indique donc si l'on a commis des erreurs graphiques.

Par le point D, menons des rayons polaires aux points de division et, prenant ce point D pour point de départ, construisons le polygone funiculaire de ces forces.

Soient Dβ ce polygone et β son point d'intersection avec l'horizontale C′B′. La somme des moments des forces $2y'_i$ considérées. relativement au point C′, est le produit

$$\mathrm{C}'\beta \times \mathrm{DC}',$$

du segment C′β par la distance polaire DC′. Ainsi, l'on a

$$\sum_0^{\frac{s}{2}} 2y'_i \times 2y_i = \mathrm{C}'\beta \times \mathrm{DC}' = 2\mathrm{C}'\beta \times \mathrm{DC},$$

la somme $\sum_0^{\frac{s}{2}}$ s'étendant à un demi-arc, ou

$$(a) \qquad \sum_0^{\frac{s}{2}} 2y'_i y_i = \mathrm{C}'\beta \times \mathrm{DC},$$

ou

$$(a') \qquad \sum_0^s y'_i y_i = C'\beta \times DC,$$

la somme $\sum_0^s$ s'étendant à tout l'arc.

3° **Polygone funiculaire des charges données.** — Supposons, comme au § 427, que l'arc considéré porte une charge uniforme de p kilogrammes par mètre, répartie sur la moitié de gauche de l'arc.

Quand on connaîtra les moments de flexion résultant d'une telle charge, on en déduira par simple superposition ceux qui résulteraient d'une charge permanente uniforme sur tout l'arc, et d'une surcharge uniforme p' sur une de ses moitiés.

Traçons (*fig.* A_0) le polygone funiculaire de la charge considérée en prenant $C'\beta = q_0$ pour distance polaire.

Ce polygone $\alpha_0 OB_0$ sera formé d'un arc de parabole $\alpha_0 O$ et d'une horizontale OB_0, obtenues comme au § 427, sauf la distance polaire qui est différente.

4° **Ligne de fermeture $a_0 b_0$.** — Menons la corde $\alpha_0 B_0$. L'aire du triangle $\alpha_0 OB_0$ est égale au produit de sa base $OB_0 = \frac{l}{2}$ par la moitié de sa hauteur, laquelle moitié est égale à OD'.

Donc cette aire est

$$OD' \times \frac{l}{2}.$$

Soit f_0 le milieu de $A_0 O$; menons la verticale de ce point, elle donne la flèche fg du segment de parabole $\alpha_0 fO$. L'aire de ce segment est les $\frac{2}{3}$ du rectangle de base fg et de hauteur $OA_0 = \frac{l}{2}$.

Elle est donc

$$\tfrac{2}{3} fg \times \frac{l}{2}.$$

L'aire totale est donc

$$\alpha_0 OB = S = (OD' + \tfrac{2}{3} fg)\frac{l}{2}.$$

Le centre de gravité du triangle est aux $\frac{2}{3}$ de la médiane $B_0 g$, en γ_0.

Le centre de gravité du segment de parabole est (§ **142**) sur la ligne fg aux $\frac{3}{5}$ de fg à partir du point f. Soit γ'_0 ce point.

Aux points γ_0 et γ'_0 on doit appliquer des forces descendantes proportionnelles aux aires correspondantes, par conséquent pouvant être représentées respectivement par les longueurs

$$\mathrm{OD}' \quad \text{et} \quad \tfrac{2}{3} fg.$$

Ces forces doivent être équilibrées par deux forces ascendantes dirigées suivant les verticales placées à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{2}{3}$ de A_0B_0.

Les longueurs obtenues pour ces forces multipliées respectivement par $\frac{l}{2}$ représenteront les aires des deux triangles $\alpha_0 a_0 B_0$ et $B_0 a_0 b_0$ constitutifs du trapèze $\alpha_0 a_0 B_0 b_0$, c'est-à-dire que les longueurs obtenues seront précisément celles $\alpha_0 a_0$ et $B_0 b_0$.

Portons $D'D'' = \frac{2}{3} fg$ au bout de OD'; puis prenant un pôle quelconque, par exemple f_0, menons les rayons polaires $f_0 O$, $f_0 D'$, $f_0 D''$ et construisons un polygone funiculaire correspondant des forces appliquées en γ_0 et γ'_0.

Prolongeons les côtés extrêmes de ce polygone jusqu'à leurs rencontres avec les verticales placées à $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de A_0B_0. Joignons les points de rencontre et traçons le rayon polaire $f_0\omega_0$ parallèle à la droite ainsi obtenue.

Les deux segments $O\omega_0$ et $\omega_0 D''$ représentent les longueurs $\alpha_0 a_0$ et $B_0 b_0$.

La ligne $a_0 b_0$ est ainsi connue et, par suite, on connaît les ordonnées z'_0 du polygone funiculaire $\alpha_0 f O B_0$ comptées depuis cette ligne.

5° **Tracé du polygone** $D\gamma$. — Les forces à considérer ici sont proportionnelles à $\frac{z'_0\,ds}{I} = \frac{z'_0\,dx}{I'}$ qu'on remplace par des forces en nombre fini proportionnelles à $\frac{z'_0\,\Delta x}{I'}$, et, comme le facteur $\frac{\Delta x}{I'}$ est constant, on le supprime comme pour les forces $\frac{y'\Delta x}{I'}$, de sorte qu'aux points de division b'_i et c'_i on applique des forces égales aux ordonnées correspondantes z'_0.

Considérons deux points b'_i et c'_i sur la même horizontale $b'_i c'_i$.

Soient z'_{0i} et z'''_{0i} les ordonnées positives ou négatives comprises

(*fig.* A_0) entre le polygone funiculaire et sa ligne de fermeture, déterminées par les verticales menées par les points b'_i et c'_i.

Suivant la ligne d'action $b'_i c'_i$ agissent les deux forces z'_{0i} et z'''_{0i} appliquées l'une en b'_i et l'autre en c'_i. Nous pouvons les supposer toutes deux appliquées en c'_i, ce qui donnera, en ce point, une force totale égale à la somme *algébrique* $z'_{0i} + z'''_{0i}$. Il faut prendre la somme des moments de toutes les forces analogues appliquées aux divers points c'_i. Mais, comme, pour les forces y'_i, nous n'avons considéré que celles appliquées à une moitié de l'arc et qu'ainsi nous avons réduit de moitié la somme des moments de ces forces, nous devons faire la même réduction pour les nouvelles forces. C'est pourquoi, en chaque point c'_i, on appliquera seulement une force $\frac{z'_{0i} + z'''_{0i}}{2}$ proportionnelle à la demi-somme *algébrique* des ordonnées répondant à ce point et à son symétrique b'_i. Comme les y_i, on les a doublées de sorte que les nouvelles forces considérées sont, en fait, représentées par les longueurs

$$z'_{0i} + z'''_{0i},$$

relevées sur le dessin.

Ces nouvelles forces forment, comme celles $2y_i$, un couple. La somme de leurs moments est donc la même, quel que soit le point par rapport auquel on prend les moments. Nous les prendrons par rapport au point C'.

A cet effet, sur l'horizontale C'A', on portera ces forces

$$z'_{0i} + z'''_{0i}$$

dans un sens convenu, de C' vers A' pour celles qui sont positives et en sens inverse pour celles qui sont négatives. Pour abréger, sur l'épure, on les a désignées par les lettres z''_i, de sorte que

$$z''_i = z'_{0i} + z'''_{0i}.$$

Le polygone des forces se fermerait si le tracé était rigoureux.

On construira le polygone funiculaire $D\gamma$ ayant le point D pour pôle et pour point de départ. La somme des moments de ces forces est

$$C'\gamma \times DC',$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_0^{\frac{s}{2}}(z'_{0i}+z'''_{0i})y'_i = C'\gamma \times DC',$$

ou

$$(b)\qquad \sum_0^{\frac{s}{2}}(z'_{0i}+z'''_{0i})y_i = C'\gamma \times DC,$$

ou

$$(b')\qquad \sum_0^{\frac{s}{2}} z''_{0i} \times y_i = C'\gamma \times DC.$$

6° **Détermination de la poussée.** — La poussée q est donnée par la formule

$$q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0\, dx}{I'} y}{\int \frac{y'\, dx}{I'} y},$$

les intégrales s'étendant à l'arc entier, ou, comme I' est constant et que l'arc est symétrique,

$$q = q_0 \frac{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{z'_{0i}+z'''_{0i}}{2} y\, dx}{\int_0^{\frac{s}{2}} y'y\, dx},$$

chaque intégrale s'étendant à une moitié seulement de l'arc, ou approximativement

$$q = q_0 \frac{\sum_0^{\frac{s}{2}} \frac{z'_{0i}+z'''_{0i}}{2} y\, \Delta x}{\sum_0^{\frac{s}{2}} y'_i y_i\, \Delta x}$$

ou, comme Δx est constant,

$$q = q_0 \frac{\sum_0^{\frac{s}{2}} \frac{z'_{0i} + z'''_{0i}}{2} y_i}{\sum_0^{\frac{s}{2}} y'_i y_i}$$

ou, à cause de (a) et (b),

$$q = q_0 \frac{C'\gamma \times DC}{C'\beta \times DC} = q_0 \frac{C'\gamma}{C'\beta};$$

et, comme l'on a pris

$$q_0 = C'\beta,$$

il en résulte

$$q = C'\gamma.$$

7° **Tracé du polygone des pressions.** — Amplifions (*fig.* A_0) les ordonnées z'_0 des points α_0, O, B_0 dans le rapport

$$\frac{q_0}{q} = \frac{C'\beta}{C'\gamma} (^1).$$

Portons (*fig.* A) les ordonnées ainsi amplifiées à partir des points a, b et du point où la ligne ab coupe la verticale du milieu de l'arc; nous aurons trois points α, O′, β. Joignons O′β. Prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre en s avec la verticale du milieu de AD. Joignons $s\alpha$ et traçons la parabole à axe vertical tangente en A et O′ aux lignes αs et $\beta O's$.

Le contour $\alpha O'\beta$ formé par la parabole et la droite donne le polygone des pressions ([2]).

§ 452.

DÉTERMINATION DES MOMENT DE FLEXION, EFFORT TRANCHANT, COMPRESSION DE LA FIBRE MOYENNE. — Le produit d'une ordonnée comprise

([1]) La construction n'est pas indiquée. Joignez le point D au point β et γ : puis, pour amplifier l'ordonnée $\alpha_0 a_0$, inscrivez dans l'angle DC′β une horizontale égale à cette ordonnée. Elle déterminera dans l'angle DC′γ, l'ordonnée amplifiée.

([2]) Comme vérification il doit couper la ligne de fermeture ab aux points σ et σ' situés sur les verticales des points σ_0 et σ'_0 (*fig.* A_0) où le polygone $\alpha_0 O B_0$ coupe sa ligne de fermeture $a_0 b_0$. Cette considération permettrait de ne déterminer qu'un seul des trois points α, O, B.

entre cette ligne et l'arc, par la distance polaire $q = C'\gamma$, l'un des facteurs mesuré à l'échelle des forces, l'autre à l'échelle des longueurs, donne le moment de flexion correspondant : ainsi, en b_5, l'ordonnée dont il s'agit a une longueur de

$$b_5 b'_5 = 14^{mm},5.$$

D'autre part

$$q = C'\gamma = 19^{mm},5;$$

donc, comme on a pris une échelle des forces, telle que p tonnes soient représentées par 1^{mm} et que l'échelle des longueurs est elle-même de 1^{mm} par mètre, le moment de flexion en b_5 est

$$M = -14,5 \times 19,5p = -282,750p \text{ tonnes-mètres.}$$

Ce moment est négatif.

Au point symétrique du précédent, le moment de flexion est positif et égal à

$$M' = 9,5 \times 19,5p = 186,25 \text{ tonnes-mètres.}$$

Si la charge permanente est de p tonnes par mètre et qu'une surcharge de p' tonnes par mètre règne sur la moitié de gauche de l'arc, le moment de flexion total en b_5 sera, d'après le principe de superposition,

$$M = (186,50 - 282,75)p - 282,75p' = -282,75(p + p') + 186,50p \text{ t.-m.}$$

En menant, par les extrémités du polygone des forces des parallèles aux côtés (ou tangentes) extrêmes αs, $s\beta$ du polygone des pressions, on en obtient le pôle.

Le rayon polaire parallèle à la tangente en un point b'_5 de ce polygone donne la résultante des forces élastiques dans la section de l'arc faite au point b_5 placé sur la même verticale (§ 69). Les composantes tangente et normale à l'arc de cette force donnent la compression de la fibre moyenne et l'effort tranchant.

§ 453.

ARC DANS LEQUEL I' EST VARIABLE. — Si l'arc est trop long pour qu'on y puisse regarder I' comme constant dans toute la moitié de l'arc, on divisera une des moitiés en un *petit nombre* de sections

dans chacune desquelles on regardera I′ comme constant. On aura alors à opérer, pour la détermination des lignes de fermeture, comme il a été dit au § 449.

De plus, au lieu des polygones funiculaires de forces proportionnelles aux y' et $\frac{z'_0 + z'''_0}{2}$, on aura à tracer des polygones funiculaires relatifs à des forces proportionnelles aux $\frac{y'}{I'}$ et $\frac{z'_0 + z'''_0}{2I'}$.

On formera des longueurs représentant ces forces, comme il a été dit au § 428.

§ 454.

NOUVELLE EXPRESSION DE LA POUSSÉE. — Nous allons donner, de la poussée, une expression nouvelle et remarquable qui nous permettra d'étendre aux arcs encastrés le tracé donné pour la ligne de poussée d'un arc à appuis simples.

Reprenons l'équation (9′) du § 449

$$q = \frac{\int \frac{M'\,dx}{I'} y}{\int \frac{y'\,dx}{I'} y},$$

M′ étant le moment de flexion que les charges agissant sur l'arc produiraient sur sa corde regardée comme encastrée.

Soient h l'ordonnée à l'origine de la droite ab (*fig.* A, p. 67) et m son coefficient angulaire, de sorte que

$$y = y' + h + mx;$$

par suite,

$$\int \frac{M'\,dx}{I'} y = \int \frac{M'\,dx}{I'} y' + h \int \frac{M'\,dx}{I'} + m \int \frac{M'x\,dx}{I'}.$$

Les deux derniers termes sont nuls (§ 449); donc

$$\int \frac{M'\,dx}{I'} y = \int \frac{M'\,dx}{I'} y'$$

et

$$q = \frac{\int \frac{M'\,dx}{I'} y'}{\int \frac{y\,dx}{I'} y'}.$$

Or le moment de flexion M′ en un point d'une poutre encastrée est, à une fonction linéaire près des coordonnées de ce point, égal au moment de flexion μ qui s'y produirait si la poutre posait sur appuis simples.

Donc

$$M' = \mu + A_0 + B_0 x,$$

A_0 et B_0 étant deux constantes.

Par suite

$$\int \frac{M'\,dx}{I'} y' = \int \frac{\mu\,dx}{I'} y' + A_0 \int \frac{dx}{I'} y' + B_0 \int \frac{x\,dx}{I'} y'.$$

Les deux derniers termes sont nuls en vertu des équations (8) du § 449; donc

$$\int \frac{M'\,dx}{I'} y' = \int \frac{\mu\,dx}{I'} y'$$

et

$$q = \frac{\int \frac{\mu\,dx}{I'} y'}{\int \frac{y\,dx}{I'} y'}.$$

Corollaire. — Si l'on appelle z_0 (*fig.* A_0, *Pl. XXXIV*) les ordonnées du polygone funiculaire $\alpha_0 O B_0$ comptées depuis sa corde $\alpha_0 \beta_0$, on aura

$$\mu = q_0 z_0$$

et, par suite,

$$q = q_0 \frac{\int \frac{z_0\,dx}{I'} y'}{\int \frac{y\,dx}{I'} y'},$$

ce qui montre qu'on peut, dans la recherche de la poussée, utiliser, si on le préfère, les ordonnées z_0, au lieu de celles z'_0, et trouver la poussée sans connaître la ligne de fermeture $a_0 b_0$.

§ 455.

LIGNE DE POUSSÉE. — Si une seule charge agit sur l'arc, on pourrait déterminer la poussée par la méthode d'Eddy; en faisant cette détermination pour chaque position du poids et portant en ordonnée une longueur proportionnelle à la poussée correspondante,

on obtiendrait une courbe que nous appelons *la ligne de poussée*.

Une telle ligne est d'autant plus importante à tracer que, quand on la connaît, on en déduit, par de simples superpositions, les poussées produites par des charges quelles qu'elles soient.

Mais cette marche serait très laborieuse et nous allons montrer que cette ligne peut se tracer par une méthode très simple et en tout pareille à celle que nous avons donnée dans le cas d'un arc posé sur tourillons sans encastrement.

THÉORÈME I. — *Si un mobile unique parcourt un arc de section constante ou variable et qu'en chaque élément dx de la projection horizontale de l'arc on applique une force verticale $\frac{y'}{I'}dx$, y' étant l'ordonnée de l'arc comptée depuis la ligne de fermeture, la somme des moments relativement à un point quelconque de celles de ces forces qui sont à la gauche de ce point est proportionnelle à la poussée que le mobile détermine dans l'arc lorsqu'il est arrivé sur la verticale de ce même point.*

Ce théorème résulte de l'expression de la poussée qui vient d'être obtenue

$$q = \frac{\int_0^l \frac{\mu y'}{I'}\,dx}{\int_0^l \frac{yy'}{I'}\,dx},$$

les intégrales étant à effectuer pour toute la longueur $l = AB'$ de la projection horizontale de l'arc (*fig.* A, p. 67).

Soit P un poids dont l'abscisse comptée depuis l'appui de gauche soit α.

On a

$$\text{Pour } x < \alpha \ldots\ldots \quad \mu = P \times \frac{l-\alpha}{l}x;$$

$$\text{Pour } x > \alpha \ldots\ldots \quad \mu = P \times \frac{\alpha}{l}(l-x).$$

Donc

$$\int_0^l \frac{\mu y'}{I'}\,dx = P\,\frac{l-\alpha}{l}\int_0^\alpha \frac{y'x}{I'}\,dx + \frac{P\alpha}{l}\int_\alpha^l \frac{(l-x)y'}{I'}\,dx$$

ou

$$\int_0^l \frac{\mu y'}{\mathrm{I}'}dx = \mathrm{P}\int_0^\alpha \frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'}x + \mathrm{P}\alpha\int_\alpha^l \frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'} - \frac{\mathrm{P}\alpha}{l}\int_0^l \frac{y'}{\mathrm{I}'}x\,dx.$$

Mais les forces $\frac{y'}{\mathrm{I}'}dx$ sont en équilibre, c'est-à-dire que

$$\int_0^l \frac{y'}{\mathrm{I}}\,dx = 0,$$

$$\int_0^l \frac{y'}{\mathrm{I}'}x\,dx = 0.$$

A cause de la seconde de ces équations, le coefficient de $\frac{\mathrm{P}\alpha}{l}$ est nul et la première donne

$$\int_0^\alpha \frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'} = -\int_\alpha^l \frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'}.$$

Par suite,

$$\int_0^l \frac{\mu y'}{\mathrm{I}'}dx = \mathrm{P}\int_0^\alpha \frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'}x - \mathrm{P}\alpha\int_0^\alpha \frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'} = -\mathrm{P}\int_0^\alpha (\alpha - x)\frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'}$$

et

$$q = \mathrm{P}\frac{-\int_0^\alpha (\alpha - x)\frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'}}{\int_0^l \frac{yy'}{\mathrm{I}'}dx}.$$

Le dénominateur est une constante indépendante de la position du poids P; le numérateur est la somme des moments indiquée dans l'énoncé.

Théorème II. — *Construisez une courbe funiculaire de distance polaire quelconque d, des forces verticales* $\frac{y'\,dx}{\mathrm{I}'}$, *en partant du point* A *et en prenant le premier rayon polaire horizontal. Cette courbe passera par le point* B'; *en ses extrémités* A *et* B', *elle sera tangente à l'horizontale* AB' *et son ordonnée en un point quelconque comptée depuis cette horizontale sera proportionnelle à la poussée qu'un poids* P *arrivé en ce point détermine dans l'arc.*

Cette courbe funiculaire sera donc la *ligne de poussée* de l'arc. En effet, les forces $\frac{y'}{I'}dx$ se faisant équilibre, leurs courbes funiculaires comme leur polygone des forces se ferment.

Si l'on part du point A et que le premier rayon polaire soit horizontal, la courbe sera, par construction, tangente en A à AB'.

Et, pour qu'elle se ferme, il faut que son dernier élément passe en B' et soit dirigé suivant la ligne B'A.

Dans la pratique, on remplace la valeur ci-dessus de q par celle-ci :

$$q = P\frac{\sum_0^\alpha \frac{y'}{I'}(\alpha - x)}{\sum_0^l \frac{yy'}{I'}},$$

et la courbe funiculaire par un polygone funiculaire.

Soit η l'ordonnée de ce polygone répondant à une abscisse α. D'après le théorème des moments,

$$\sum_0^\alpha \frac{y'}{I'}(\alpha - x) = \eta \times d.$$

D'ailleurs, le dénominateur a été construit (§ 451) et est représenté aussi par le produit de deux lignes.

Soit $h \times k$ ce produit, de sorte que

$$q = P\frac{\eta \times d}{h \times k},$$

c'est-à-dire que pour avoir la poussée qu'un poids P arrivé en un point quelconque détermine dans l'arc, il suffit de multiplier ce poids par le nombre abstrait $\frac{\eta \times d}{h \times k}$, qu'on obtient en mesurant sur l'épure les longueurs η, d, h, k à une échelle convenue quelconque, par exemple en millimètres et fractions de millimètre.

Remarque. — Il est évident *a priori* que la ligne de poussée devait passer en A et B' et y être tangente à l'axe des abscisses; car le poids P placé soit en A, soit en B, soit dans des positions

infiniment voisines de ces deux points ne produit pas de poussée sur l'arc, celui-ci étant encastré à ses deux extrémités.

§ 456.

APPLICATION A UN ARC SYMÉTRIQUE ET POUR LEQUEL I' EST CONSTANT. — Lorsque I' est constant, les théorèmes précédents s'appliquent à des charges $y'\,dx$ et l'on a

$$q = P\frac{\sum_0^\alpha y'(\alpha - x)}{\sum_0^l yy'}.$$

Concevons que l'on construise (*fig.* A, *Pl. XXXIV*) le polygone funiculaire de distance polaire d de forces verticales y', appliquées aux points de division b_i en partant du point A et prenant le premier rayon polaire horizontal.

La construction a été faite sur l'épure. Le polygone des forces y' est sur la verticale de l'appui B. Les forces répondant à des valeurs positives de y'_i ont été portées de haut en bas, les autres de bas en haut. La distance polaire d a été prise égale à C'β et alors, si η est l'ordonnée du polygone obtenu, répondant à une abscisse quelconque α, on a

$$\sum_0^\alpha y'(\alpha - x) = \eta \times C'\beta.$$

D'autre part, on a trouvé (§ 453)

$$\sum_0^l yy' = CD \times C'\beta.$$

Donc

$$q = P\frac{\eta}{CD}.$$

Pour avoir la poussée que produit le poids P dans une position quelconque, il suffit de multiplier ce poids par le *nombre abstrait* $\frac{\eta}{CD}$ obtenu en mesurant η à une échelle quelconque et divi-

sant le nombre obtenu par la flèche de l'arc mesurée à la même échelle.

§ 457.

POUSSÉE PRODUITE PAR DES CHARGES QUELCONQUES. — Si des charges

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n,$$

d'abscisses

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

agissent sur l'arc, la poussée q qu'elles déterminent sera

$$q = \frac{1}{CD}(P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \ldots + P_n\eta_n),$$

η_1, η_2, ... étant les coordonnées de la ligne de poussée répondant aux abscisses α_1, α_2, ...

On peut donc l'obtenir soit par le calcul, en mesurant ces ordonnées, soit en plaçant les poids P_1, P_2, ... horizontalement aux extrémités des ordonnées η_1, η_2, ... et construisant un polygone funiculaire de ces forces, de distance polaire CD.

Le segment qu'il détermine sur AB, mesuré à l'échelle des forces, exprime la poussée.

§ 458.

ARCS OU I' EST VARIABLE. — Si l'arc est trop long pour qu'on puisse regarder I' comme constant dans toute son étendue, on le divisera en un petit nombre de sections dans chacune desquelles I' est regardé comme constant et l'on opérera sur les longueurs proportionnelles aux $\frac{\gamma'}{I'}$, ainsi qu'il a été souvent indiqué.

§ 459.

LIGNES D'INFLUENCE. — Pour avoir la ligne d'influence relative à une section donnée d'abscisse x, nous devons supposer un poids P parcourant l'arc et, dans chacune de ses positions, porter, en ordonnée, le moment de flexion positif ou négatif M qu'il détermine

dans la section, où plutôt le rapport $\frac{M}{P}$ de ce moment au poids P, rapport qui est une longueur.

Or

$$M = M' - qy',$$

où M′ est le moment de flexion que le poids mobile produirait dans la section d'abscisse x de la poutre droite correspondant à l'arc.

Si α est, à un instant quelconque, l'abscisse du poids voyageur, M′ est une fonction de α et de x; q est une fonction de α seulement, et y' une fonction de x seulement.

Si, dans cette équation, on regarde α et M comme des coordonnées courantes, x et y' comme des paramètres constants, elle représente l'équation de la ligne d'influence cherchée.

Observons d'abord que, pour des sections faites aux deux points d'intersection de la ligne de fermeture ab avec l'arc, on a

$$y' = 0$$

et, par suite aussi,

$$M = M'.$$

Donc, *les lignes d'influence d'un arc de section constante ou variable, encastré à ses deux extrémités, relativement à des sections faites aux deux points d'intersection de la ligne de fermeture avec l'arc, coïncident avec celles des sections analogues faites dans la poutre droite correspondante.*

Or nous avons vu (§ 341) comment on trouve les lignes d'influence relatives à une poutre droite encastrée à ses deux bouts, et ainsi nous aurons déjà les lignes d'influence relativement à deux sections d'un arc quelconque.

On commencera toujours par tracer ces deux lignes. Dans le cas d'un arc de structure symétrique, de section constante ou variable, elles sont symétriques et il suffit d'en tracer une.

Si I′ est regardé comme constant dans l'arc, c'est une ligne d'influence relative à une poutre de section constante.

Or, les lignes d'influence d'une telle poutre sont faciles à obtenir, leurs équations sont données au § 341 et les lignes elles-

mêmes sont en partie tracées (*fig.* 24, p. 122 de la II[e] Partie). Ajoutons que, si la longueur l de la poutre varie, les ordonnées de chaque ligne se modifient toutes dans un même rapport. Il suffit donc de rapporter ces ordonnées à la longueur l pour que les mêmes courbes servent pour toutes les poutres.

Si l'on veut avoir les lignes d'influence relatives à une ou plusieurs autres sections faites dans l'arc (et il sera, en général, désirable d'avoir encore au moins celle relative à la section faite à la clef), on pourra employer un artifice analogue à celui que nous avons indiqué pour les arcs posés sur tourillons.

Les ordonnées de la ligne de poussée fournissent les valeurs de q ou des valeurs proportionnelles.

Supposons d'abord qu'elles donnent les valeurs même de q.

De la dernière équation on tire

$$\frac{M}{Py'} = \frac{M'}{Py'} - \frac{q}{P},$$

où $\frac{M}{P}$, $\frac{M'}{P}$, $\frac{q}{P}$ sont les moments et la poussée qui seraient dus à l'unité de poids.

Comme pour une section donnée, y' est constant, les ordonnées $\frac{M}{Py'}$ donnent, aussi bien que celles $\frac{M}{P}$, les lignes d'influence.

Ces rapports sont des nombres abstraits qu'on portera, à une échelle arbitraire.

A cette même échelle, les rapports $\frac{M'}{P'y'}$ sont les ordonnées des lignes d'influence relatives à la poutre droite correspondante à l'arc.

Par suite, les différences $\frac{M'}{Py'} - \frac{q}{P}$ sont les portions d'ordonnées comprises entre ces dernières lignes, lesquelles varient d'une section à une autre et la *ligne de poussée* qui n'est à tracer qu'une fois pour toutes.

Ainsi, *le tracé des lignes d'influence relatives à un arc encastré à ses deux bouts se trouve ramené à celui des lignes d'influence relatives à la poutre droite correspondante.*

Si I' est regardé comme constant, ce sont les lignes d'influence d'une poutre de section constante qu'on aura à tracer.

Si les ordonnées de la ligne de poussée sont les produits de la poussée par une constante, le même raisonnement s'applique en multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par cette constante.

§ 460.

APPLICATION A UN ARC SYMÉTRIQUE DANS LEQUEL I' EST CONSTANT. — Appliquons ces considérations à l'arc ACB (*fig.* A, *Pl. XXXIV*), pour lequel la ligne de poussée est tracée et les ordonnées η sont telles que

$$q = \mathrm{P}\frac{\eta}{\mathrm{CD}}$$

ou, si l'on fait P = 1,

$$q = \frac{\eta}{\mathrm{CD}}.$$

Par suite,

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}' - \frac{\eta}{\mathrm{CD}}y'.$$

On doit se rappeler que M et M' ont ici la signification qu'ont, dans les équations précédentes, les rapports $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}$ et $\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{P}}$, c'est-à-dire que ce sont des longueurs, ce que montre d'ailleurs le dernier terme de l'équation.

D'ailleurs (§ 340) pour $\alpha < x$, c'est-à-dire à gauche de la section que l'on considère, l'equation (9') donne

$$\mathrm{M}' = \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\left[2 - \frac{\alpha}{l} - \left(3 - 2\frac{\alpha}{l}\right)\frac{x}{l}\right]l;$$

pour $\alpha > x$ ou à droite de cette section, l'équation (9) donne

$$\mathrm{M}' = \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2\left[\left(1 + \frac{2\alpha}{l}\right)\frac{x}{l} - \frac{\alpha}{l}\right]l.$$

Pour $\alpha = x$, c'est-à-dire lorsque le mobile traverse la section elle-même à laquelle se rapporte la ligne d'influence, on a

$$\mathrm{M}' = 2\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 l.$$

Ceci posé, on a d'abord tracé (*fig.* A, *Pl. XXXIV*) en traits discontinus la ligne d'influence de la section faite, dans l'arc, au

point g où il est coupé par la ligne de fermeture. En ce point on a $y' = 0$ et, par suite,

$$M = M',$$

c'est-à-dire que c'est la ligne d'influence de la poutre droite, relative au point g'.

On trouve sur l'épure $Ag' = 32^{mm},5$; comme $l = 160^{mm}$, il en résulte

$$\frac{Ag'}{l} = \frac{x}{l} = \frac{32.5}{160},$$

ou sensiblement

$$\frac{x}{l} = \frac{32}{160} = \frac{1}{5}.$$

Les équations des deux branches sont donc :

Pour $\alpha < x$, branche de gauche,

$$M' = \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \left(7 - \frac{3}{5}\frac{\alpha}{l}\right)\frac{l}{5};$$

Pour $\alpha > x$, branche de droite,

$$M' = \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{3\alpha}{l}\right)\frac{l}{5}.$$

Pour $\alpha = x = \frac{1}{5}l$,

$$M' = 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 l = \frac{32}{5^4} l = \frac{32 \times 2^4}{10000} = 0,051\, l$$

ou

$$M' = 0,051 \times 160^{mm} = 8^{mm},1,$$

si l'on adopte, comme nous l'avons fait, la même échelle pour les ordonnées et les abscisses.

Comme pour toutes les lignes d'influence d'une poutre encastrée, relatives à des sections placées dans le tiers extrême de gauche, la branche de gauche présente sa concavité vers le bas ; celle de droite offre un point d'inflexion et coupe l'axe des x. Celle-ci le coupe au point d'abscisse

$$\alpha = \frac{l}{3}.$$

Pour les sections autres que celle dont on vient de parler, les lignes d'influence de l'arc ne sont pas les mêmes que celles de la poutre droite correspondante. Mais, pour ramener le problème à

celui analogue relatif aux poutres droites, de l'équation

$$M = M' - \frac{\eta}{CD} y'$$

on tire

$$\frac{M \times CD}{y'} = M' \times \frac{CD}{y'} - \eta.$$

Si donc on trace des courbes dont les ordonnées sont les produits

$$(c) \qquad M' \times \frac{CD}{y'},$$

les portions d'ordonnées comprises entre ces courbes et la ligne de poussée représentent les produits

$$M' \times \frac{CD}{y'},$$

de sorte que, si l'on appelle η' ces portions d'ordonnées, on aura

$$M \times \frac{CD}{y'} = \eta',$$

$$M = \eta' \times \frac{y'}{CD}.$$

Les courbes dont les ordonnées sont les produits (c) sont les lignes d'influence de la poutre droite amplifiées pour chaque courbe dans le rapport constant $\frac{CD}{y'}$.

On a, pour les ordonnées de ces courbes,

1° Pour $\alpha < x$, branche de gauche,

$$\frac{M' \times CD}{y'} = \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \left[2 - \frac{\alpha}{l} - \left(3 - \frac{2\alpha}{l}\right)\frac{x}{l}\right]\frac{l}{y'} CD;$$

2° Pour $\alpha > x$, branche de droite,

$$\frac{M' \times CD}{y'} = \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{2\alpha}{l}\right)\frac{x}{l} - \frac{\alpha}{l}\right]\frac{l}{y'} CD.$$

On a tracé ces courbes :

1° Pour la section faite dans l'appui gauche pour lequel $x = 0$, $y' = -Aa$, de sorte que la seconde branche existe seule et a pour

équation

$$\frac{M' \times CD}{Aa} = + \frac{\alpha}{Aa}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 CD.$$

Elle est indiquée en traits discontinus. C'est la courbe de la *fig.* 24, IIe Partie, p. 122, dont les ordonnées sont amplifiées dans le rapport $\frac{CD}{Aa}$.

2° Pour la section du milieu où $x = \frac{l}{2}$, les deux branches sont symétriques et l'équation de celle de gauche est

$$\frac{M' \times CD}{y'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \frac{l}{CD'} \times CD,$$

équation d'une parabole du second degré AS ayant son sommet en A. Pour $\alpha = \frac{l}{2}$, on a

$$M' \times \frac{CD}{y'} = \frac{1}{8}\frac{l}{CD'} CD = 20^{mm} \frac{CD}{CD'},$$

$$M' \times \frac{CD}{y'} = \frac{42,5}{12,5} \times 20^{mm} = 68^{mm}.$$

Cette ordonnée DS est portée à partir du point D. On a tracé en lignes pleines les deux courbes symétriques AS, SB.

§ 461.

PASSAGE D'UN MOBILE UNIQUE SUR UN ARC. — Si un mobile de poids P passe sur l'arc :

1° Dans la section g il produit le moment maximum lorsqu'il arrive dans la verticale du point de la ligne d'influence où l'ordonnée, comptée depuis la droite AB, est maxima. Cette ordonnée se trouve dans la section g elle-même, l'ordonnée en g' de la ligne d'influence étant plus grande que l'ordonnée répondant au point où la tangente est horizontale.

L'ordonnée en g' est de 8^{mm} à l'échelle ou de 8^{m} en réalité; donc, si P est exprimé en tonnes, le moment maximum qui se produit en g pendant le passage du mobile est

$$M = M' = 8P \text{ tonnes-mètres}$$

ou, si l'on veut, pour avoir ce moment, il faut attribuer au poids P un bras de levier de 8^m.

Dans la section du milieu, c'est encore lorsque le mobile passe dans la section qu'il y produit le plus grand moment. Cette fois pour l'obtenir on mesure la portion d'ordonnée comprise entre la ligne d'influence relative à la poutre droite et la ligne de poussée.

Soit η' cette ordonnée; le moment de flexion cherché sera donné par l'équation

$$M \times \frac{CD}{y'} = P\eta',$$

$$M = \frac{y'}{CD} \times P\eta'.$$

Or

$$\eta' = SO = 28^{mm},5,$$

$$CD = 42^{mm},5,$$

$$y' = CD' = 12^{mm},5;$$

d'où

$$M = \frac{12,5 \times 28,5}{42,5} \text{ P tonnes-mètres} = 8,4 \text{ P tonnes-mètres.}$$

Dans la section d'encastrement, il faut prendre encore le maximum de la portion d'ordonnée comprise entre la ligne d'influence et la ligne de poussée. Cette portion d'ordonnée est marquée; c'est $\varepsilon\varepsilon' = 13^{mm}$ environ.

D'ailleurs, ici l'on a

$$y' = -Aa = -30^{mm},$$

d'où

$$\frac{M \times CD}{y'} = P \times \varepsilon\varepsilon' = 13P,$$

$$M = -\frac{13 \times 30}{CD} = -\frac{13 \times 30}{42,5} P.$$

Le moment maximum est ici négatif, et sa valeur absolue est

$$\frac{13 \times 30}{42,50} P,$$

soit environ 9,3 P tonnes-mètres.

§ 462.

PASSAGE D'UN CONVOI. — S'il passait un convoi sur l'arc, pour avoir le moment de flexion maximum qu'il détermine dans une section, on le placerait de façon que son centre de gravité passe dans le voisinage du point où un mobile unique passant sur l'arc produirait le moment maximum dans la section considérée. Puis, pour trouver le sens dans lequel il faut le déplacer pour l'amener à sa position la plus défavorable, on procéderait ainsi :

Supposons qu'il s'agisse de la section du milieu.

Reprenons le convoi à cinq essieux, déjà considéré au § 436, et dont les charges sont

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_5.$$

On l'a placé au sentiment, de façon que la section considérée soit entre les essieux n[os] 3 et 4 qui comprennent aussi le centre de gravité du convoi.

Soient

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5$$

les points où les verticales des essieux coupent la ligne de poussée, et

$$p_1,\ p_2,\ p_4,\ p_5$$

ceux où ces verticales coupent la ligne d'influence de la poutre droite.

Formons (*fig. a*) le polygone ab des cinq charges, en les portant bout à bout, non sur une verticale, mais sur une horizontale.

Du point a, menons une parallèle à la tangente en q_1, jusqu'à sa rencontre avec la verticale du point 1.2 du polygone ab; de ce point de rencontre, une parallèle à la tangente en q_2 jusqu'à sa rencontre avec la verticale du point 2.3, et ainsi de suite.

On formera ainsi le contour ab'.

On formera de même le contour aib'' en menant des parallèles aux tangentes en p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 à la ligne d'influence.

La signification de l'ordonnée $b'b''$ est facile à apercevoir.

Soient z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 les ordonnées de la ligne d'influence comptées depuis l'horizontale AB au droit des charges et η_1, η_2,

η_3, η_4, η_5 celles de la ligne de poussée. On aura

$$M = \frac{CD}{y'}[P_1(z_1-\eta_1)+P_2(z_2-\eta_2)+\ldots+P_5(z_5-\eta_5)].$$

Donc, pour un déplacement infiniment petit ε du convoi, on aura, en appelant z'_i, η'_i les dérivées $\frac{dz_i}{d\alpha}$, $\frac{d\eta_i}{d\alpha}$ des ordonnées z_i et η_i par rapport à leurs abscisses, c'est-à-dire les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes en p_i et q_i

$$\Delta M = \frac{CD}{y'}[P_1 z'_1 + P_2 z'_2 + \ldots + P_5 z'_5 - (P_1\eta'_1 + \ldots + P_5\eta'_5)]\varepsilon$$

ou

$$\Delta M = \frac{CD}{y'} \times b'b'' \times \varepsilon.$$

Donc, si M varie d'une manière continue, le maximum n'a lieu que si $b'b'' = 0$. C'est ce qui se produirait s'il n'y avait pas rebroussement sur la ligne d'influence, si l'on se trouvait près d'un point dont l'ordonnée $z - \eta$ présentât un maximum analytique. Cela arriverait, par exemple, si l'on cherchait le moment maximum produit par le convoi sur la section d'encastrement, ce qui exigerait qu'on plaçât le convoi à cheval sur la verticale $\varepsilon\varepsilon'$.

Mais, d'une manière générale, pour que M soit maximum, il faut que ΔM soit négatif, quel que soit le signe de ε, ce qui exige, si $b'b''$ n'est pas nul, que cette quantité change brusquement de signe avec ε, c'est-à-dire suivant qu'on déplace le convoi un peu vers la droite ou vers la gauche. Cela n'arrive pas dans la position actuelle; mais on voit que cela arrivera si l'on déplace le convoi, de façon que l'essieu n° 3 se trouve dans la section.

Cette dernière position est indiquée en pointillé.

Si l'on fait la construction des deux polygones ab' et ab'' pour deux positions voisines prises de part et d'autre de celle-ci, on voit que le point b' ne change pas sensiblement; le point b'' ne change pas sensiblement non plus pour une position un peu à gauche de celle pointillée; mais il passe brusquement en b''_1 de l'autre côté de b pour une position un peu à droite de celle pointillée. Donc cette dernière répond au maximum de M.

L'équation ci-dessus donne l'expression correspondante de M qu'on peut ou calculer en mesurant les ordonnées z_i, η_i sur l'épure, ou construire à l'aide d'un polygone funiculaire, comme il a été fait au § 436.

§ 463.

LIGNES D'INFLUENCE DES EFFORTS TRANCHANTS. — La formule

$$T = \frac{dM}{ds}$$

donne pour l'effort tranchant dans un arc encastré

$$T = \frac{dM'}{ds} - q\frac{dy'}{ds}$$

ou

$$T = \frac{dM'}{dx}\frac{dx}{ds} - q\frac{dy'}{ds};$$

d'où

$$\frac{T}{\frac{dy'}{ds}} = \frac{dM'}{dx}\frac{dx}{dy'} - q$$

ou

$$\frac{T}{\frac{dy'}{ds}} = T'\frac{dx}{dy'} - q,$$

en appelant T' l'effort tranchant dans la poutre droite correspondante à l'arc, compté, comme T, positivement de haut en bas.

Si l'arc est symétrique et, par suite, la ligne de fermeture *ab* horizontale et si θ est l'angle de *ab* avec la tangente à l'arc, au droit de la section relativement à laquelle on cherche la ligne d'influence, on aura

$$\frac{dy'}{ds} = \sin\theta, \qquad \frac{dx}{dy'} = \cot\theta;$$

d'où

$$\frac{T}{\sin\theta} = T'\cot\theta - q.$$

Si la ligne *ab* n'est pas horizontale et qu'on appelle θ l'angle qu'elle fait avec la tangente à la fibre moyenne dans la section que l'on considère, et i l'angle qu'elle fait avec la verticale, on voit aisément que

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{\sin\theta}{\sin i},$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin(i - \theta),$$

et par suite

$$T\frac{\sin i}{\sin\theta} = T'\frac{\sin(i-\theta)}{\sin\theta} - q,$$

formule qui, pour $i = \frac{\varpi}{2}$, coïncide avec la précédente.

En tous cas, θ est une constante pour une section donnée, de sorte qu'une courbe ayant pour ordonnées $T\frac{\sin i}{\sin\theta}$ représente la ligne d'influence relative à la section de l'arc à laquelle se rapporte l'angle θ; de même, une ligne ayant des ordonnées égales à $T'\frac{\sin(i-\theta)}{\sin\theta}$ peut être regardée comme une ligne d'influence relative à cette même section de la poutre droite.

Si donc on construit ces dernières lignes d'influence, les portions d'ordonnées comprises entre la ligne de poussée et les nouvelles lignes représenteront les ordonnées $T\frac{ds}{dy} = T\frac{\sin i}{\sin\theta}$ relatives à l'arc.

§ 464.

CAS D'UN ARC POUR LEQUEL I' EST CONSTANT. — Envisageons le cas d'un arc symétrique dans lequel I′ puisse être regardé comme sensiblement constant, de façon que la poutre droite à considérer se trouve de section constante.

On a, à cause de la symétrie,

$$I = \frac{\varpi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{T}{\sin\theta} = T'\cot\theta - q.$$

Si η est l'ordonnée de la ligne de poussée, on a (§ 456)

$$q = \frac{\eta}{CD},$$

d'où

$$T \times \frac{CD}{\sin\theta} = T' \times C'D\cot\theta - \eta.$$

D'ailleurs nous avons vu (§ 342) que, pour avoir T′, il suffit de construire la parabole du troisième degré

$$y = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\left(1 + \frac{2x}{l}\right)$$

qui est tangente à l'axe des x au droit de l'appui B, coupe la verticale de l'appui A origine des coordonnées au point $y = 1$; a, en ce point, sa tangente horizontale et présente une inflexion au milieu de AB où son ordonnée est

$$y = \frac{1}{2}.$$

Donc la courbe ayant pour ordonnée $T' \times CD \cot\theta$ sera de même tangente à AB en A ; elle coupera la verticale du point B au point ayant pour ordonnée

$$CD \cot\theta,$$

qu'il est facile de construire pour chaque section ; elle présente une inflexion au milieu de AB, l'ordonnée correspondante étant

$$\frac{1}{2} CD \cot\theta.$$

Soient (*fig.* 49, p. 104) ACB l'arc, AQB la ligne de poussée et X une section quelconque.

Menons la tangente à l'arc en X et prolongeons-la jusqu'à la corde AB d'une part et jusqu'à l'horizontale du sommet C d'autre part.

Projetons-la sur cette horizontale en $X_0 X'_0$.

On aura

$$X_0 X'_0 = CD \cot\theta.$$

Prenons l'ordonnée

$$AA' = X_0 X'_0.$$

Joignons A'B qui coupe la verticale du milieu en b ; la courbe cherchée est A'bB ayant ses tangentes horizontales en A' et B, et son inflexion en b.

Transportons cette courbe parallèlement à elle-même en AB'.

La verticale de X coupe les deux courbes en X' et X''. A gauche de la section, les ordonnées comprises entre A'X' et la ligne de poussée représentent

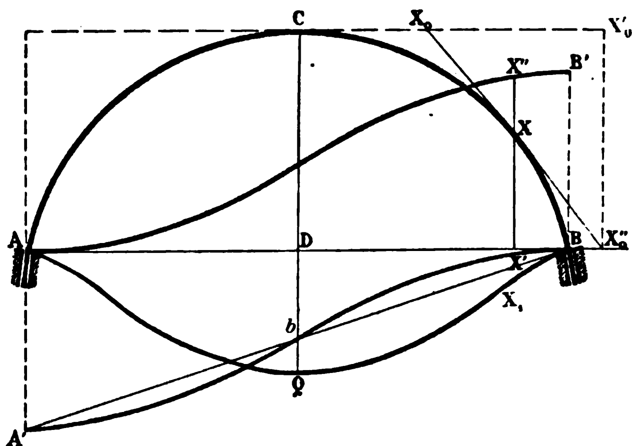
$$\frac{T' \times CD}{\sin\theta},$$

A droite, ce sont les ordonnées comprises entre X''B' et la ligne de poussée.

§ 465.

EFFORTS TRANCHANTS PRODUITS PAR LE PASSAGE D'UN MOBILE OU D'UN CONVOI. — La plus grande de toutes les ordonnées est $X''X_1$ déterminée par la section considérée entre la ligne AB′ et la ligne de poussée. Par suite, un mobile passant sur l'arc y produit dans la section X le plus grand effort tranchant à l'instant où il passe dans cette section, et cet effort est

Fig. 49.



donné par la formule

$$\frac{T \times CD}{\sin\theta} = X'X_1 \times P,$$

d'où

$$T = \frac{X'X_1}{CD} P \sin\theta.$$

$\frac{CD}{\sin\theta}$ représente la longueur $X_0X''_0$ de la tangente à l'arc. Donc

$$T = \frac{X'X_1}{X_0X''_0} \times P.$$

Le rapport purement numérique $\frac{X'X_1}{X_0X''_0}$ s'obtient en mesurant les deux longueurs $X''X_1$ et $X_0X''_0$ à une même échelle commune quelconque, en millimètres, par exemple, et fractions de millimètre et formant le quotient des deux nombres obtenus.

Pour le passage d'un convoi, on procédera par fausse position en suivant exactement la même marche que pour les moments de flexion (§ 462).

§ 466.

LIEU DU SOMMET DU POLYGONE DES PRESSIONS ET ENVELOPPES DES RÉACTIONS DES APPUIS PRODUITES PAR LE PASSAGE D'UN MOBILE UNIQUE SUR UN ARC ENCASTRÉ. — Le polygone des pressions produit par une charge unique P se compose de deux droites seulement venant se couper sur la verticale du point P. Ces deux droites ne sont autres que les directions des réactions des appuis. On peut se proposer de chercher :

1° Le lieu de leur point d'intersection S;

2° L'enveloppe de chacune des deux droites.

On obtient ainsi trois courbes qui ont été utilisées : la première, par M. Winckler, les deux autres par MM. Winckler et Fränckel. Si on les a tracées, on peut, pour chaque position du poids P, trouver de suite les directions des réactions des appuis. Il suffit, pour cela, par le point où la verticale du poids P coupe la courbe lieu des points S, de mener des tangentes aux deux courbes enveloppes.

Mais le polygone des pressions ne fournit pas, comme les lignes d'influence, le moyen de discuter, à simple vue, les effets du passage d'un convoi. Nous allons montrer, au contraire, que la connaissance :

1° De la ligne de poussée;

2° Des lignes d'influence relatives aux deux points où la ligne *ab* (*fig.* A, *Pl. XXXIV*) coupe l'arc (soit en tout trois courbes) permet de trouver, si on le veut, les réactions des appuis pour chaque position d'un mobile et, par suite, les trois courbes 1° et 2° que nous venons de définir.

Ajoutons que la ligne de poussée et les deux lignes d'influence s'obtiennent très facilement, puisque la première est, comme nous l'avons établi, un polygone funiculaire à tracer.

Les deux autres sont connues d'avance. En effet, ces deux lignes d'influence sont les mêmes que celles de la poutre droite correspondant à l'arc que l'on considère.

Donc *elles ne dépendent pas de la forme de l'arc*, et quand I' est regardé comme constant, elles sont pareilles entre elles à l'échelle près des ordonnées *pour tous les arcs*.

Pour montrer que, en effet, la connaissance de la ligne de poussée et des lignes d'influence relatives aux deux points g et g' considérés (lignes symétriques pour un arc symétrique) fournit aisément les réactions des appuis produites par un poids P dans une position donnée quelconque, observons que les ordonnées de la verticale P déterminées sur les deux courbes d'influence fournissent, par définition, les moments de flexion M_g, $M_{g'}$ aux points g et g'.

De plus, l'ordonnée de la ligne de poussée donne la poussée correspondante q par la formule

$$q = \frac{\eta}{CD}.$$

Par suite

$$\frac{M_g}{q} = M_g \times \frac{CD}{\eta};$$

$$\frac{M_{g'}}{q} = M_{g'} \times \frac{CD}{\eta},$$

M_g, $M_{g'}$ sont des longueurs; en les réduisant dans le rapport $\frac{CD}{\eta}$, on a donc les deux nouvelles longueurs $\frac{M_g}{q}$, $\frac{M_{g'}}{q}$ qu'on portera en ordonnées à partir des extrémités g et g' de la fibre moyenne. On aura ainsi deux points du polygone des pressions, soit deux points appartenant aux réactions des appuis.

Comme ces réactions r et r' doivent faire équilibre à la force P, que, de plus, leur composante horizontale $q = P\frac{\eta}{CD}$ est connue, il est aisé de les construire par simple décomposition d'une force en deux autres.

En les construisant pour diverses positions du point P, on aurait les trois courbes de MM. Winckler et Fränckel si l'on jugeait utile de les tracer.

Mais ces lignes ne sont pas nécessaires; celles que nous avons introduites en tiennent lieu, d'une façon qui nous semble plus commode pour la discussion des effets d'une charge mobile et aussi commode pour celle de charges fixes.

§ 467.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE. — Les équations $(-A_0)$ du § 423 appliquées à un arc encastré (ce qui entraîne $u_0 = v_0 = \Omega_0 = 0$), en y négligeant les termes relatifs à l'effort tranchant et à la compression de la fibre moyenne, mais en ayant égard à la température, peuvent s'écrire, si l'extrémité de gauche A de l'arc est prise pour origine des coordonnées,

$$u = -\frac{y}{E}\int\frac{M}{I}ds + \frac{1}{E}\int\frac{M}{I}y\,ds + \delta\tau \times x,$$

$$v = \frac{x}{E}\int\frac{M}{I}ds - \frac{1}{E}\int\frac{M}{I}x\,ds + \delta\tau \times y,$$

$$\Omega = \frac{1}{E}\int\frac{M}{I}ds.$$

Pour le point B, on a

$$u = v = \Omega = 0.$$

Si donc l et h sont les coordonnées de ce point, on aura

$$\int\frac{M}{I}ds = 0,$$

$$\int\frac{M}{I}x\,ds = E\,\delta\tau\,h,$$

$$\int\frac{M}{I}y\,ds = -E\,\delta\tau\,l;$$

soit

$$\int\frac{M}{I'}dx = 0,$$

$$\int\frac{M}{I'}x\,dx = E\,\delta\tau\,h,$$

$$\int\frac{M}{I'}y\,dx = -E\,\delta\tau\,l.$$

Si les appuis A et B sont de niveau, on a $h = 0$. Les deux premières équations sont indépendantes de la température, et, en posant

$$M = M' - qy'$$

ou

$$M = q_0 z'_0 - qy',$$

q_0, z'_0, y' ayant les mêmes significations que précédemment, l'on

aura q par l'équation

$$q = \frac{q_0 \int \frac{z'_0}{I'} y\, dx}{\int \frac{y'}{I'} y\, dx} + q_0 \frac{E\, \delta\tau\, l}{\int \frac{y'}{I'} y\, dx}.$$

On connaît le premier terme qui représente la poussée due à la charge, abstraction faite de la température. On connaît le dénominateur du second terme; ce terme se trouve donc sans difficulté, comme au § 442.

Si les appuis ne sont pas de niveau, posons toujours (§ 449, 2°)

$$M = q_0 z'_0 - q y',$$

les z'_0 étant les ordonnées du polygone funiculaire des charges données comptées à partir d'une ligne de fermeture $a_0 b_0$ à déterminer (*fig.* 50, p. 109), et les y' étant, de même, les ordonnées de l'arc comptées à partir d'une ligne de fermeture ab à déterminer, comme au § 449, 2°.

Déterminons celle $a_0 b_0$ de façon que l'on ait

$$\int \frac{z'_0}{I'} dx = 0,$$

$$\int \frac{z'_0}{I'} x\, dx = \frac{E\, \delta\tau\, h}{q_0}.$$

Supposons d'abord I' constant. Alors

$$\int z'_0\, dx = 0,$$

$$z'_0\, x\, dx = \frac{EI'\, \delta\tau\, h}{q_0}.$$

La première exprime que les forces $z'_0\, dx$ forment un couple; la seconde que le moment de ce couple est donné et égal à

$$\frac{EI'\, \delta\tau\, h}{q_0}.$$

Soit

$$z'_0 = z_0 - \zeta_0,$$

z_0 étant les ordonnées du polygone funiculaire comptées depuis la corde $\alpha_0 \beta_0$, et ζ_0 celles comprises entre $\alpha_0 \beta_0$ et $a_0 b_0$.

On voit que les forces fictives descendantes et connues $z_0\, dx$ et

les forces ascendantes $\zeta_0\, dx$ doivent former un couple de grandeur donnée.

Fig. 50.

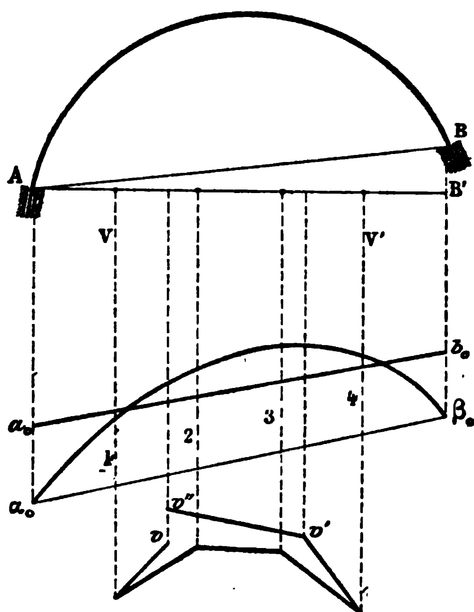
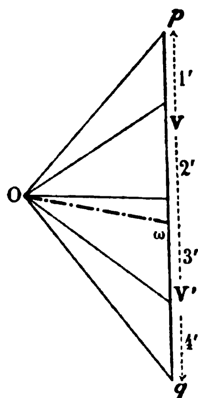


Fig. *a*.



Mais les forces ascendantes $\zeta_0\, dx$ se composent en deux résultantes V et V′ placées aux $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de la longueur de la corde AB.

Cela étant, au lieu de considérer des forces en nombre infini, divisons la corde en un certain nombre de parties égales Δx et ne considérons que les forces $z'_0 \Delta x$; on aura

$$\Sigma z'_0 = 0,$$
$$\Sigma z'_0 x = \frac{EI'\delta\tau h}{q_0 \Delta x}.$$

Portons les forces 1', 2', 3', 4' égales aux ordonnées comptées depuis la corde $\alpha_0 \beta_0$ et formées par les verticales des points de division, bout à bout, suivant le polygone pq (*fig. a*, p. 109). Prenons un pôle O et construisons un polygone funiculaire de ces forces en arrêtant les côtés extrêmes en v et v' sur les verticales V et V'. Soit d la distance polaire de ce polygone. A partir de v portons une longueur

$$vv'' = \frac{EI'\delta\tau h}{q_0 \Delta x \times d}.$$

Le second membre forme bien une longueur, comme il est aisé de le voir : car q_0 est une force; E est le rapport d'une force au carré d'une longueur; δ et τ sont deux nombres. Donc le numérateur est de degré 1 en force et de degré 3 en longueur; le dénominateur de degré 1 en force et de degré 2 en longueur. Ce second membre est donc bien une longueur, comme le sont les z_0 si l'on considère q_0 comme une force.

Joignons $v'v''$, et, par le pôle, menons le rayon $O\omega$ parallèle à cette ligne; les forces V et V' sont représentées par les distances du point ω à l'origine et à l'extrémité du polygone des forces (*fig. a*); car elles forment un couple avec les forces données puisqu'elles ferment le polygone de ces forces et que, de plus, la somme des moments de toutes ces forces relativement à un point de V est égale au produit $vv'' \times d$. C'est donc là le moment du couple.

D'autre part, si l'on conçoit menée la diagonale $a_0 \beta_0$ du trapèze $a_0 \alpha_0 b_0 \beta_0$, l'aire du triangle $a_0 b_0 \beta_0$ est

$$V' \times \Delta x = b_0 \beta_0 \times \frac{l}{2},$$

et comme $\Delta x = \frac{l}{n}$, si l'on a divisé la poutre en n parties,

$$b_0 \beta_0 = \frac{2V'}{n}.$$

De même

$$a_0\alpha_0 = \frac{2V}{n},$$

ce qui détermine la droite $a_0 b_0$.

Si l'on porte à présent la valeur

$$M = q_0 z'_0 - qy'$$

dans les équations de condition qui, pour I' constant, deviennent

$$\int M\,dx = 0,$$
$$\int Mx\,dx = EI'\delta\tau h,$$
$$\int My\,dx = -EI'\delta\tau l,$$

à cause de

$$\int z'_0\,dx = 0,$$
$$q_0\int z'_0 x\,dx = -EI\delta\tau h,$$

il vient

$$\int y'\,dx = 0,$$
$$\int y' x\,dx = 0,$$
$$q_0\int z_0 y\,dx = q\int y' y\,dx = -EI\delta\tau h.$$

Les deux premières montrent que la ligne de fermeture de l'arc AB est la même que si l'on n'avait pas égard à la température et la dernière donne q, comme dans le premier cas traité (celui où $h = 0$).

Si I' est variable, on divisera l'arc en un petit nombre de sections dans chacune desquelles cette grandeur puisse être regardée comme constante.

Soit I'_0 sa valeur dans l'une des sections et $I' = kI'_0$ ses valeurs dans les autres, les k étant des nombres. Les équations à considérer pourront s'écrire

$$\int \frac{z'_0}{k}\,dx = 0,$$
$$\int \frac{z'_0}{k}\,x\,dx = \frac{EI'_0\delta\tau h}{q_0},$$
$$\int \frac{z'_0}{k}y\,dx - q\int \frac{y'}{k}\,y\,dx + \frac{EI'_0\delta\tau l}{k} = 0,$$

et l'on opérera sur les longueurs $\frac{z'_0}{k}$ au lieu de celles z'_0, ainsi qu'il a été fait à diverses reprises.

§ 468.

FORMULES ET CONSTRUCTION EN AYANT ÉGARD A LA COMPRESSION DE LA FIBRE MOYENNE ET AUX EFFORTS TRANCHANTS. — Quel que soit l'arc, symétrique ou non, et quelles que soient les forces verticales ou non qui le sollicitent, rapportons-les à deux axes rectangulaires quelconques. Soient x_0, y_0 et x_1, y_1 les coordonnées des deux extrémités A et B de la fibre moyenne et appelons, pour abréger,

$$l = x_1 - x_0 \qquad \text{et} \qquad h = y_1 - y_0$$

leurs différences.

On devra faire dans les formules (A_1) du § 423

$$u_0 = v_0 = 0, \qquad u_1 = v_1 = 0,$$
$$\Omega_0 = 0, \qquad \Omega_1 = 0.$$

Par suite, elles deviennent, en supprimant les accents, supposant le rapport g des deux coefficients d'élasticité constant et ayant égard à un erratum, indiqué à la fin de la Table des matières,

$$(a)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{M}{EI}\,ds = 0, \\ \displaystyle\int \frac{M}{EI}\,y\,ds - \int \left[\frac{X}{ES} + \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{T}{ES}\,\frac{dy}{ds}\right] ds + \delta\tau\, l = 0, \\ \displaystyle\int \frac{M}{EI}\,x\,ds + \int \left[\frac{Y}{ES} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{T}{ES}\,\frac{dx}{ds}\right] ds - \delta\tau\, h = 0, \end{cases}$$

les intégrales étant à effectuer dans toute l'étendue de l'arc.

Soit μ le moment de flexion connu que détermineraient les charges agissantes, dans l'arc considéré, si cet arc avait l'extrémité A fixe sans encastrement, l'extrémité B reposant à la façon d'une poutre droite sur un appui normal à la résultante des charges. On aura

$$(b)\qquad M = \mu + A + Bx - qy,$$

A, B, q étant trois constantes.

On tire de là (§ 423)

$$(b')\quad\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial \mu}{\partial y} + q = X_\nu + q, \\ Y &= \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + B = Y_\nu + B, \\ T &= -X\frac{dy}{ds} + Y\frac{dx}{ds} = T_\nu - q\frac{dy}{ds} + B\frac{dx}{ds}, \end{aligned}\right.$$

où X_ν, Y_ν, $T_\nu = -X_\nu \dfrac{dx}{ds} + Y_\nu \dfrac{dx}{ds}$ sont connus.

Connaissant ainsi le moment de flexion M, on en déduira (§ 423), par de simples différentiations, l'effort tranchant et la compression de la fibre moyenne.

Soient μ_1, μ_2, μ_3 ce que deviennent les premiers membres des trois équations (a) si l'on y remplace respectivement les lettres M, X, Y, T par celles μ, X_ν, Y_ν, T_ν, en sorte que μ_1, μ_2, μ_3 sont trois constantes connues dès qu'on se donne les charges, la structure de l'arc et sa température. Les équations définissant A, B, q sont alors

$$(c)\quad\left\{\begin{aligned} & A\int\frac{ds}{EI} + B\int x\frac{ds}{EI} - q\int y\frac{ds}{EI} = -\mu_1, \\ & A\int\frac{ds}{EI}y + B\int\left[\frac{xy}{EI} - \left(1+\frac{1}{g}\right)\frac{\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}}{ES}\right]ds \\ & \qquad - q\int\left[\frac{y^2\,ds}{EI} + \frac{1}{ES} - \left(1+\frac{1}{g}\right)\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{ES}\right]ds = -\mu_2, \\ & A\int\frac{ds}{EI}x + B\int\left[\frac{x^2\,ds}{EI} + \frac{1}{ES} - \left(1+\frac{1}{g}\right)\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{ES}\right]ds \\ & \qquad - q\int\left[\frac{xy}{EI} - \left(1+\frac{1}{g}\right)\frac{\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}}{ES}\right]ds = -\mu_3. \end{aligned}\right.$$

§ 469.

DÉFINITIONS. — Considérons la fibre moyenne comme une ligne matérielle. Attribuons-lui, en chacun de ses points, une densité fictive proportionnelle à l'inverse $\frac{1}{EI}$ du produit du coefficient d'é-

lasticité par le moment d'inertie de la section de l'arc passant par ce point. Le centre de gravité de la ligne ainsi considérée est ce que nous appellerons le *centre de gravité de la fibre moyenne.*

Si l'arc est de section constante, c'est le centre de gravité de la fibre moyenne considérée comme une ligne homogène. En tout cas, il n'y a aucune difficulté à le déterminer :

1° Analytiquement, par les formules

$$\xi \int \frac{ds}{\mathrm{EI}} = \int \frac{x\,ds}{\mathrm{EI}}\,d,$$
$$\eta \int \frac{ds}{\mathrm{EI}} = \int \frac{y\,ds}{\mathrm{EI}}\,d,$$

qui en donnent les coordonnées ξ, η.

Le coefficient d'élasticité E disparaît si la matière est homogène et le moment d'inertie disparaît également si la section est constante. Si $\mathrm{I}' = \mathrm{I}\frac{dx}{ds}$ est constant ainsi que E, la première devient

$$\xi \int dx = \int x\,dx$$

ou

$$\xi = \frac{l}{2}.$$

Le centre de gravité est sur la perpendiculaire élevée au milieu de la corde de l'arc.

2° Graphiquement, en divisant l'arc en parties égales Δs, si l'on introduit I, et en divisant la projection de la corde sur l'axe des x en parties égales Δx si l'on introduit $\mathrm{I}' = \mathrm{I}\frac{dx}{ds}$, et cherchant, dans le premier cas, le centre des forces parallèles $\frac{1}{\mathrm{EI}}$, si E est variable d'une section à une autre, $\frac{1}{\mathrm{I}}$ si E est constant et de forces toutes égales entre elles si I lui-même est constant; dans le second celui des forces parallèles $\frac{1}{\mathrm{EI}'}$ si E est variable, $\frac{1}{\mathrm{I}'}$ si E est constant et de forces égales entre elles si I′ est constant, appliquées aux points de division.

Si l'arc est de structure symétrique par rapport à la verticale de son sommet, le centre de gravité est sur cette ligne et l'on n'aura qu'un polygone funiculaire à construire pour avoir le point cherché.

§ 470.

APPLICATION A UN ARC DE STRUCTURE SYMÉTRIQUE, DE SECTION CONSTANTE OU NON. — Supposons un arc de section constante ou variable, soumis à des charges verticales et de structure symétrique.

Les formules (a) sont vraies, quels que soient les axes de coordonnées. Prenons le centre de gravité de l'arc tel qu'il vient d'être défini pour origine des coordonnées et l'axe des x horizontal. On a

$$\int \frac{x\,ds}{\mathrm{EI}} = 0, \qquad \int \frac{y\,ds}{\mathrm{EI}} = 0.$$

De plus, à cause de la symétrie de l'arc,

$$\int \frac{xy}{\mathrm{EI}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \int \frac{\frac{dx}{d}\,\frac{dy}{ds}}{\mathrm{ES}}\,ds = 0.$$

Donc les équations (c) fournissent immédiatement les inconnues A, B, q; savoir

$$(e)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = -\dfrac{\mu_1}{\displaystyle\int \frac{ds}{\mathrm{EI}}}, \\[2ex] \mathrm{B} = -\dfrac{\mu_3}{\displaystyle\int \left[\frac{x^2\,ds}{\mathrm{EI}} + \frac{1}{\mathrm{ES}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{\mathrm{ES}}\right] ds}, \\[2ex] q = \dfrac{\mu_2}{\displaystyle\int \left[\frac{y^2\,ds}{\mathrm{EI}} + \frac{1}{\mathrm{ES}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\mathrm{ES}}\right] ds}. \end{cases}$$

Dans le cas où les charges sont verticales, μ représente le moment de flexion d'une poutre droite coïncidant avec la corde de l'arc et posée sur appuis simples. Donc μ est indépendant de y, par suite

$$(5)\quad \begin{cases} \mu_1 = \displaystyle\int \frac{\mu}{\mathrm{EI}}\,ds, \\[2ex] \mu_2 = \displaystyle\int \frac{\mu}{\mathrm{EI}}\,y\,ds - \int \left(1 + \frac{1}{g}\right) \mathrm{Y}_v \frac{\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds}}{\mathrm{ES}}\,ds + \delta\tau\,l, \\[2ex] \mu_3 = \displaystyle\int \frac{\mu}{\mathrm{EI}}\,x\,ds + \int \mathrm{Y}_v \left[\frac{1}{\mathrm{ES}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{\mathrm{ES}}\right] ds; \end{cases}$$

et, si l'on a construit un polygone funiculaire des charges données de distance polaire q_0, qu'on appelle z_0 les ordonnées comprises entre ce polygone et sa corde, qu'on suppose E constant, on aura

$$(g)\quad\left\{\begin{aligned}
A &= -q_0\,\frac{\displaystyle\int\frac{z_0\,ds}{I}}{\displaystyle\int\frac{ds}{I}},\\
B &= -q_0\,\frac{\displaystyle\int\frac{z_0 x}{I}\,ds+\int\frac{1}{S}\,\frac{dz_0}{dx}\left[\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\frac{1}{g}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]ds}{\displaystyle\int\frac{x^2\,ds}{I}+\int\frac{1}{S}\left[\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\frac{1}{g}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]ds},\\
q &= q_0\,\frac{\displaystyle\int\frac{z_0 y}{I}\,ds-\left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{1}{S}\,\frac{dz_0}{dx}\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds}\,ds+E\,\delta\tau\,l}{\displaystyle\int\frac{y^2\,ds}{I}+\int\frac{1}{S}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-\frac{1}{g}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]ds}.
\end{aligned}\right.$$

Arc dans lequel $I' = I\dfrac{dx}{ds}$, $S' = S\dfrac{dx}{ds}$ sont regardés comme constants. — Dans ce cas, à cause de

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

et

$$\int\frac{dz_0}{dx}\,dx = \int_0^l\frac{dz_0}{dx}\,dx = 0,$$

puisque z_0 est nul aux limites de l'intégration, on aura

$$(g')\quad\left\{\begin{aligned}
A &= -q_0\,\frac{\int z_0\,dx}{l},\\
B &= -q_0\,\frac{\displaystyle\int z_0 x\,dx-\frac{I}{S}\left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{dz_0}{dx}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 dx}{\displaystyle\frac{l^3}{3}+\frac{I}{S}\left[l-\left(1+\frac{1}{g}\right)\int\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 dx\right]},\\
q &= q_0\,\frac{\displaystyle\int z_0 y\,dx-\frac{I}{S}\left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{dz_0}{dx}\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds}\,ds+EI'\delta\tau\,l}{\displaystyle\int y^2\,dx+\frac{I}{S}\left[l-\left(1+\frac{1}{g}\right)\int\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dx\right]}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on néglige les termes relatifs à l'effort tranchant,

$$(g'')\quad\begin{cases} \mathrm{A} = -q_0\dfrac{\int z_0\,dx}{l} = -\dfrac{\int \mu\,dx}{l}, \\[2ex] \mathrm{B} = -q_0\dfrac{\int z_0 x\,dx}{\frac{1}{3}l^3 + \frac{1}{\mathrm{S}}l} = \dfrac{\int \mu x\,dx}{\frac{1}{3}l^3 + \frac{1}{\mathrm{S}}l}, \\[2ex] q = \dfrac{q_0\int z_0 y\,dx + \mathrm{EI}'\,\delta\tau\,l}{\int y^2\,dx + \frac{1}{\mathrm{S}}l} = \dfrac{\int \mu y\,dx + \mathrm{EI}'\delta\tau\,l}{\int y^2\,dx + \frac{1}{\mathrm{S}}l}. \end{cases}$$

Ces formules sont extrêmement simples soit à construire, soit à calculer.

Notons que ce que nous appelons ici y, c'est la même grandeur que celle qui, dans les épures précédentes, est représentée par y'.

Si l'on veut construire les formules (g''), on écrira

$$(g''')\quad\begin{cases} \mathrm{A} = q_0\dfrac{\Delta x}{l}\Sigma z_0, \\[2ex] \mathrm{B} = \dfrac{-q_0}{\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{\mathrm{S}}}\,\dfrac{\Delta x}{l}\Sigma z_0 x, \\[2ex] q = \dfrac{1}{\Sigma y^2 + \frac{1}{\mathrm{S}}\,\frac{l}{\Delta x}}\left(q_0\Sigma z_0 y + \dfrac{\mathrm{EI}'\,\delta l}{\Delta x}\right), \end{cases}$$

et il n'y a pas plus de difficulté à construire les seconds membres que dans la méthode d'Eddy, quoiqu'on tienne ici compte de la compression de la fibre moyenne. Si l'arc est de section variable d'une manière quelconque et que l'on néglige les termes de l'ordre de l'effort tranchant, on aura

$$\mathrm{A} = -q_0\frac{\displaystyle\int\frac{z_0\,ds}{\mathrm{I}}}{\displaystyle\int\frac{ds}{\mathrm{I}}},$$

$$\mathrm{B} = -q_0\frac{\displaystyle\int\frac{z_0 x}{\mathrm{I}}\,ds + \int\frac{1}{\mathrm{S}}\,\frac{dz_0}{ds}\,ds}{\displaystyle\int\frac{x^2}{\mathrm{I}}\,ds + \int\frac{ds}{\mathrm{S}}},$$

$$q = \frac{q_0\displaystyle\int\frac{z_0 y}{\mathrm{I}}\,ds + \mathrm{E}\,\delta\tau\,l}{\displaystyle\int\frac{y^2}{\mathrm{I}}\,ds + \int\frac{ds}{\mathrm{S}}},$$

où les seules intégrales nouvelles, c'est-à-dire qui ne se sont pas rencontrées dans la méthode d'Eddy, sont

$$\int \frac{1}{S} \frac{dz_0}{dx} ds = \int \frac{1}{S'} \frac{dz_0}{dx} dx$$

et

$$\int \frac{ds}{S} = \int \frac{dx}{S'}.$$

Si S' ne peut pas être regardé comme constant dans tout l'arc, on divisera celui-ci en sections dans chacune desquelles cette grandeur soit constante. Dans une section où $S' = S'_i$, on aura

$$\int \frac{1}{S'} \frac{dz_0}{dx} dx = \frac{1}{S'_i}(z_0^{i+1} - z_0^i),$$

z_0^{i+1} et z_0^i étant les valeurs des z_0 aux deux extrémités de la section. D'ailleurs

$$\int \frac{dx}{S'} = \Delta x \sum \frac{1}{S'},$$

et il n'y a pas de difficulté à obtenir cette grandeur.

Si l'on veut employer le calcul, on remplacera $q_0 z_0$ par μ. Pour des charges données, continues ou non, μ se déduira des formules du § 193 et alors, A, B, q étant déterminées, on a

$$M = \mu + A + Bx - qy,$$

$$T = \frac{dM}{ds},$$

$$N = -\frac{\partial M}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial M}{\partial x}\frac{dy}{ds} = \left(q - \frac{d\mu}{dy}\right)\frac{dx}{ds} + \left(B + \frac{d\mu}{dx}\right)\frac{dy}{ds}.$$

Si enfin on veut construire les formules rigoureuses (g'), il suffit, dans le cas où I et S' sont constants, de savoir encore construire

$$\int \frac{dz_0}{dx}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}dx, \quad \int \frac{dz_0}{dx}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds, \quad \int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds, \quad \int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds.$$

Or, si α est l'angle que la tangente en un point de la fibre moyenne fait avec l'axe des x et β l'angle que le côté du polygone funiculaire rencontré par la verticale du point G fait avec le même axe, on a

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha, \qquad \frac{dz_0}{dx} = \cos\beta.$$

Donc les expressions ci-dessus deviennent

$$\tfrac{1}{2}\int \cos\alpha \sin 2\alpha \, dx;$$

$$\int \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz_0}{dx}\, dx + \tfrac{1}{2}\int \cos\beta \cos 2\alpha \, dx = \tfrac{1}{2}\int \cos\beta \cos 2\alpha \, dx,$$

$$\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\, dx = \frac{l}{2} + \int \cos 2\alpha \, dx$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int \cos\beta \sin 2\alpha &= \tfrac{1}{4}\int [\sin(\beta + 2\alpha) - \sin(\beta - 2\alpha)]\, dx \\
&= \frac{\Delta x}{2}[\Sigma \sin(\beta + 2\alpha) - \Sigma \sin(\beta - 2\alpha)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\int \cos\beta \cos 2\alpha &= \tfrac{1}{4}\int [\cos(\beta - 2\alpha) - \cos(\beta + 2\alpha)]\, dx \\
&= \frac{\Delta x}{2}[\Sigma \cos(\beta + 2\alpha) - \Sigma \cos(\beta - 2\alpha)],
\end{aligned}$$

$$\int \cos 2\alpha \, dx = \Delta x \, \Sigma \cos 2\alpha.$$

Si par un point O_0 du plan on mène des parallèles $O_0 x_0$, $O_0 y_0$ aux axes et que, par ce même point, on mène des parallèles :

1° Aux côtés du polygone funiculaire;

2° Aux côtés d'un polygone inscrit dans l'arc donné et ayant ses sommets aux points de division, on formera sensiblement les angles α, β.

On peut donc construire pour chaque point de division les angles 2α, $\beta + 2\alpha$, $\beta - 2\alpha$.

Concevons que, par le point O_0, on mène des rayons formant ces angles avec l'axe Ox_0 et à une distance Δx du point O_0 une perpendiculaire à la droite $O_0 x$; les segments que cette perpendiculaire détermine sont les produits

$$\Delta x \sin 2\alpha, \quad \Delta x \sin(\beta \pm 2\alpha).$$

Il suffira de les porter bout à bout, en ayant égard à leur sens, pour avoir

$$\Sigma \Delta x \sin 2\alpha \quad \text{et} \quad \Sigma \Delta x \sin(\beta \pm 2\alpha).$$

En menant de même une perpendiculaire à $O_0 y_0$, à une distance Δx, on aurait les sommes

$$\Sigma \Delta x \cos 2\alpha \quad \text{et} \quad \Sigma \Delta x \cos(\beta \pm 2\alpha).$$

Mais, en général, les formules obtenues en négligeant les termes de l'ordre de l'effort tranchant et qui sont presque aussi simples que celles obtenues en négligeant la compression de la fibre moyenne sont suffisantes.

Si I′ et S′ étaient variables, on diviserait l'arc en sections et l'on procéderait comme nous l'avons indiqué souvent.

§ 471.

ARCS NON SYMÉTRIQUES; DÉFINITIONS. — Nous avons défini (§ 469) ce que nous entendons par le *centre de gravité de la fibre moyenne*.

Nous appellerons *moment d'inertie composé* de la fibre moyenne relativement à un axe la quantité

$$J_u = \int \left[\frac{u^2}{EI} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \frac{1}{ES} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \right] ds,$$

u étant la distance d'un point de l'élément ds à l'axe considéré.

Si l'on change d'axes, les du se modifient comme les u. Donc les moments d'inertie composés relativement à divers axes se modifient comme les moments d'inertie ordinaires, et si l'on porte sur les diverses droites Ou issues d'un point O du plan des longueurs proportionnelles à $\frac{1}{\sqrt{J_u}}$, le lieu des extrémités des droites obtenues est une ellipse.

Si l'axe Ou fait un angle α avec l'axe Ox et que l'on pose

$$J_x = \int \left[\frac{x^2}{EI} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \frac{1}{ES} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \right] ds,$$

$$J_y = \int \left[\frac{y^2}{EI} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \frac{1}{ES} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \right] ds,$$

$$J_{xy} = \int \left[\frac{xy}{EI} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \frac{1}{ES} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \right] ds,$$

on aura

$$J_u = J_x \cos^2\alpha - 2 J_{xy} \cos\alpha \sin\alpha + J_y \sin^2\alpha.$$

Les deux axes de l'ellipse, caractérisés par ce que, si on les prend pour axes de coordonnées, on a $J_{xy} = 0$, seront appelés les *axes principaux d'inertie composée* de la fibre moyenne, et par chaque point du plan il passe deux pareils axes.

Dans ces formules on peut remplacer I et S par $I' = I\frac{dx}{ds}$, $S' = S\frac{dx}{ds}$, et ds par dx.

Rien n'est plus facile que de construire les quantités J_x, J_y, J_{xy} relativement à un système d'axes rectangulaires donnés. Ce sont des expressions tout à fait pareilles à celles dont nous venons de nous occuper.

Si l'on supprime les termes multipliés par le facteur $1 + \frac{1}{g}$,

$$J_x = \int \frac{x^2}{I}\,ds,$$

$$J_y = \int \frac{y^2}{I}\,ds,$$

$$J_{xy} = \int \frac{xy}{I}\,ds,$$

et les moments d'inertie composés deviennent des moments d'inertie ordinaires de la fibre moyenne ayant $\frac{1}{I}$ pour densité.

Si, en outre, $I' = I\frac{dx}{ds}$ est constant,

$$J_x = \frac{l^3}{3I'},$$

$$J_y = \frac{1}{I'}\int y^2\,dx = \frac{\Delta x}{I'}\Sigma y^2,$$

$$J_{xy} = \frac{1}{I'}\int xy\,dx = \frac{\Delta x}{I'}\Sigma xy.$$

Que l'on supprime les termes multipliés par $1 + \frac{1}{g}$ ou non, quand on connaît les quantités J_x, J_y, J_{xy} pour un système d'axes O_x, O_y, on en déduira :

1° La direction des axes principaux qui passent par ce point;

2° Les moments d'inertie relatifs à ces axes, ou moments d'inertie principaux. Il suffit, pour cela, de tracer l'ellipse d'inertie relative au point considéré.

Après avoir déterminé le centre de gravité de l'arc, on aura donc, par la méthode qui précède, les axes principaux relatifs à ce centre de gravité et les moments d'inertie composés relatifs à ces mêmes axes.

Prenons pour axes de coordonnées les axes principaux dont il

vient d'être parlé. On aura alors

$$\int \frac{x\,ds}{EI} = 0, \quad \int \frac{y\,ds}{EI} = 0,$$

$$J_{xy} = \int \left[\frac{xy}{EI} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \frac{1}{ES} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \right] ds = 0.$$

Alors les équations (c) du § 468 qui fournissent les constantes A, B, q se réduisent de façon à donner directement les valeurs des inconnues, à savoir

$$A = \frac{-\mu_1}{\int \frac{ds}{EI}},$$

$$B = \frac{-\mu_3}{J_y + \int \frac{ds}{ES}},$$

$$q = \frac{+\mu_2}{J_x + \int \frac{ds}{ES}},$$

formules qu'on pourra construire ou calculer comme celles relatives à l'arc symétrique, avec cette seule différence que μ n'est plus ici indépendant de y, même si les charges sont verticales.

La formule (7) du § 193 donne, pour des charges isolées quelconques (et, par suite, pour des charges continues) en remplaçant les sommes par des $\int$, comme il est expliqué au paragraphe cité,

$$\mu = \frac{l - x'}{l} \sum_0^{x'} P\alpha' + \frac{x'}{l'} \sum_{x'}^{l'} P(l' - \alpha'),$$

en désignant par α' la distance à l'appui de gauche d'une charge P; par x' la distance à la verticale de cet appui, du point G de l'arc par rapport auquel on cherche le moment de flexion, et par l' la projection horizontale de la corde de l'arc.

Soit λ la distance à l'appui de gauche du centre de gravité de l'arc ou de l'origine des coordonnées actuelles et i l'inclinaison de l'axe des y sur la verticale descendante. On aura

$$\alpha' = \lambda + \beta \sin i - \alpha \cos i,$$
$$x' = \lambda + y \sin i - x \cos i,$$
$$l' = h \sin i - l \cos i,$$

α, β étant les coordonnées par rapport aux axes employés ou axes

des moments composés principaux, du point d'application de la force P agissant sur l'arc donné, et $h = y_1 - y_0$, $l = x_1 - x_0$ les différences des coordonnées des appuis A et B de l'arc.

Par suite,

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{d\mu}{dx'}\cos i,$$

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{dx'}\sin i,$$

où

$$\frac{d\mu}{dx'} = -\cos i\left(\sum_{G}^{B} P - \frac{1}{l'}\sum_{A}^{B} P\alpha'\right),$$

la première somme se rapportant aux forces comprises entre le point G et l'appui de droite, la seconde à tout l'arc; α' et l' ayant les valeurs ci-dessus spécifiées.

CHAPITRE III.

ARC ENCASTRÉ A UN BOUT ET POSÉ SUR ROTULE EN UN DE SES POINTS.

§ 472.

Théorème fondamental. — *Si un arc de section et d'élasticité constantes ou variables, soumis à des charges quelconques (verticales ou non) encastré à une de ses extrémités, est posé par un autre point sur un tourillon fixe et qu'aux divers éléments ds de la fibre moyenne comprise entre le tourillon et le point d'encastrement, on applique des forces fictives parallèles $\frac{M\,ds}{EI}$, le centre de ces forces parallèles coïncide avec le tourillon fixe* (¹).

Soient (*fig.* 51, p. 415) A_0AB la fibre moyenne de l'arc, B l'extrémité encastrée et A le tourillon fixe qui coïncidera en général avec la seconde extrémité A_0 de la fibre moyenne, mais qui peut être un point quelconque de cette courbe.

Prenons la droite AB pour axe des x et la perpendiculaire Ay pour axe des y; en posant $AB = l$, les formules (A′) du § 423 appliquées au point B pour lequel la rotation Ω est nulle, donnent

$$u = + \int \frac{My}{EI}\,ds,$$

$$v = - \int \frac{Mx}{EI}\,ds.$$

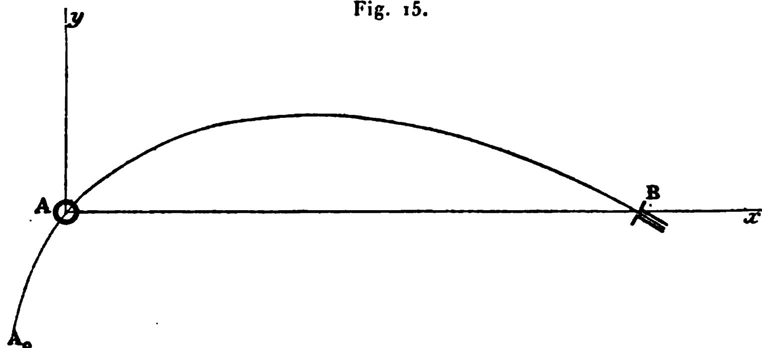
Et comme, en ce point, $u = v = 0$, on aura les deux équations de

(¹) Ce théorème suppose qu'on néglige l'effort tranchant et la compression de la fibre moyenne devant la flexion.

condition

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\mathrm{M}x}{\mathrm{EI}}\,ds = 0, \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{M}y}{\mathrm{EI}}\,ds = 0, \end{cases}$$

Fig. 15.



où les intégrales sont à prendre de A à B. Ces équations sont l'expression analytique du théorème énoncé, puisqu'elles expriment que la somme des moments des forces parallèles $\frac{\mathrm{M}\,ds}{\mathrm{EI}}$ par rapport au point A est nulle, que ces forces soient parallèles à Ax ou à Ay.

Remarques. — Ainsi que nous l'avons dit, la proposition ne suppose pas que A soit l'extrémité de l'arc. Si celui-ci se prolonge au delà de AB, on n'en devra pas moins ne considérer que des forces fictives $\frac{\mathrm{M}\,ds}{\mathrm{EI}}$ appliquées entre les points A et B.

Dans les applications graphiques qui vont suivre, nous supposerons toutefois que A et B sont les deux extrémités de l'arc.

Si l'arc est d'élasticité constante, de section constante ou variable, le théorème s'applique aux forces $\frac{\mathrm{M}\,ds}{\mathrm{I}}$ et son expression analytique devient

$$(1')\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\mathrm{M}x}{\mathrm{I}}\,ds = 0, \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{M}y}{\mathrm{I}}\,ds = 0. \end{cases}$$

Si, en outre, il est de section constante, le théorème s'applique

aux forces M ds et son expression est

$$(1'') \qquad \begin{cases} \int \mathrm{M}x\,ds = 0, \\ \int \mathrm{M}y\,ds = 0. \end{cases}$$

§ 473.

MÉTHODE D'EDDY. — Soit (*fig.* 52, p. 127) ACB l'arc soumis à des charges verticales quelconques.

Désignons par M le moment de flexion qu'elles déterminent en un point de l'arc et par M′ le moment de flexion qu'elles détermineraient dans une poutre droite horizontale AB′ simplement appuyée en A et encastrée en B′. Si G est un point de la fibre moyenne, sa projection G′ sur AB′ sera appelée le *point correspondant* de G. Si I est le moment d'inertie de la section de l'arc en G, nous attribuerons à la section G′ de la poutre fictive un moment d'inertie

$$\mathrm{I}' = \mathrm{I}\frac{dx}{ds}.$$

Que I′ soit constant ou variable, le moment de flexion M′ s'obtient aisément par la méthode indiquée au Chapitre III de la deuxième Partie.

On trace un polygone funiculaire quelconque $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$ des charges données.

Désignons par $\alpha_0\beta_0$ sa corde et par z_0 les ordonnées verticales comprises entre le polygone et cette corde; on déterminera par la méthode indiquée une droite de fermeture $\alpha_0 b_0$, telle que la résultante de forces descendantes $\frac{z_0}{\mathrm{I}'}dx$ et de forces ascendantes $\frac{\zeta_0}{\mathrm{I}'}dx$, en appelant ζ_0 les ordonnées comprises entre la corde $\alpha_0\beta_0$ et la droite cherchée, passe par le point α_0.

On aura donc

$$\int \frac{z_0 - \zeta_0}{\mathrm{I}'} x\,dx = 0$$

ou, en appelant z'_0 les ordonnées comprises entre la droite de fermeture $\alpha_0\beta_0$ et le polygone,

$$(2) \qquad \int \frac{z'_0 x}{\mathrm{I}'}dx = \int \frac{z'_0 x}{\mathrm{I}}ds = 0.$$

D'ailleurs, si q_0 est la distance polaire du polygone $\alpha_0\,\beta_0$,

(3) $$M' = q_0 z'_0,$$

d'où

(3') $$\int \frac{M'x}{I}\,ds = 0.$$

Fig. 52.

La droite $\alpha_0\,b_0$ est ainsi connue.

Supposons, à présent, que la même poutre AB' supporte, non plus les charges données ayant $\alpha_0\,1_0\,\ldots\,\beta_0$ pour un de leurs poly-

gones funiculaires, mais des charges fictives admettant l'arc donné ACB pour une de leurs courbes funiculaires.

Nous pourrons trouver de même le moment de flexion M' qui en résulte. Il suffira de déterminer la ligne de fermeture Ab, de façon que, si l'on appelle y' les ordonnées comprises entre cette ligne et l'arc, on ait

$$(4) \qquad \int \frac{y'x}{I'}\,dx = 0$$

ou

$$(4') \qquad \int \frac{y'x}{I}\,ds = 0.$$

Ceci posé, nous savons (§ 449, 2°) que, quelle que soit la droite Ab, on peut toujours écrire

$$(5) \qquad M = M' - qy',$$

q étant la poussée inconnue de l'arc.

Les équations fondamentales à satisfaire donnent

$$\int \frac{M'x}{I}\,ds - q\int \frac{y'x}{I}\,ds = 0,$$

$$\int \frac{M'y}{I}\,ds - q\int \frac{y'y}{I}\,ds = 0.$$

Mais on a

$$\int \frac{M'x}{I}\,ds = 0.$$

Donc, la première se réduit à

$$\int \frac{y'x}{I}\,ds = 0.$$

Ainsi, pour que la première équation de condition soit satisfaite, il faut et il suffit que la droite Ab à partir de laquelle on compte les y' [droite choisie de façon que l'équation (5) représente le moment de flexion M] soit celle qui vient d'être tracée, et alors la seconde équation fournit pour la poussée l'expression

$$(6) \qquad q = \frac{\int \frac{M'y}{I}\,ds}{\int \frac{y'y}{I}\,ds}$$

ou

(6′) $$q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0\,ds}{I} y}{\int \frac{y'\,ds}{I} y}$$

et, approximativement,

(6″) $$q = q_0 \frac{\sum \frac{z'_0 y}{I}}{\sum \frac{y' y}{I}},$$

si l'on divise l'arc en parties égales Δs et que les sommes Σ s'appliquent aux points de division.

Cette équation se réduit à

(6‴) $$q = q_0 \frac{\Sigma z'_0 y}{\Sigma y' y},$$

si l'arc est de section constante.

On peut encore écrire

(7) $$q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0\,dx}{I'} y}{\int \frac{y'\,dx}{I'} y}$$

ou, approximativement,

(7′) $$q = q_0 \frac{\sum \frac{z'_0}{I'} y}{\sum \frac{y'}{I'} y},$$

si l'on divise la corde en parties égales Δx, qu'on mène les verticales et que les sommes Σ s'appliquent aux nouveaux points de division obtenus ainsi sur l'arc.

Cette dernière équation se réduit, si I' est constant, à

(7″) $$q = q_0 \frac{\Sigma z'_0 y}{\Sigma y' y}.$$

En résumé, on voit que, comme au Chapitre précédent (§ 450), si c'est l'arc qu'on a divisé en parties égales, on devra construire deux polygones funiculaires $C\beta$ et $C\gamma$ de même distance polaire, l'un des forces $\frac{z'_0}{I}$, l'autre des forces $\frac{y'}{I}$.

Si c'est la corde qu'on a divisée en parties égales, ce sont les polygones analogues des forces $\frac{z'_0}{I'}$ et $\frac{y'}{I'}$ que l'on construira.

Et alors

$$q = q_0 \times \frac{C'\gamma}{C'\beta}.$$

Si l'on a pris

$$q_0 = C'\beta,$$

on aura directement

$$q = C'\gamma.$$

La marche à suivre est donc en tout pareille à celle indiquée en détail aux deux Chapitres précédents, et il n'est pas néeessaire de la développer à nouveau.

§ 474.

NOUVELLE EXPRESSION DE LA POUSSÉE. — L'expression de la poussée est, d'après ce qui précède,

$$q = \frac{\int \frac{M'y}{I} ds}{\int \frac{y'y}{I} ds}.$$

On démontrerait, comme au § 454, que si μ désigne le moment de flexion que produirait la charge donnée, si elle s'exerçait sur une poutre AB' *simplement appuyée* en ses extrémités, moment de flexion facile à déterminer (§ 193), on a identiquement

$$\int \frac{M'y}{I} ds = \int \frac{\mu y'}{I} ds,$$

d'où

$$(8) \qquad q = \frac{\int \frac{\mu y'}{I} ds}{\int \frac{yy'}{I} ds} = \frac{\sum \frac{\mu y'}{I}}{\sum \frac{yy'}{I}},$$

où (*fig.* 52, p. 127) le dénominateur

$$\sum \frac{yy'}{I} = d \times C'\beta,$$

en désignant par d la distance polaire du polygone funiculaire Cβ. En général, nous prenons cette distance égale à la flèche CD de l'arc ou à un multiple de cette flèche, suivant le surbaissement de l'arc.

§ 475.

POUSSÉE PRODUITE PAR UN POIDS MOBILE. LIGNE DE POUSSÉE. — Supposons un poids unique P placé dans une position d'abscisse α; la poussée q qu'il produit dans l'arc est proportionnelle à P. Nous pouvons donc poser

$$q = P \times \chi,$$

où χ est nécessairement un simple nombre indépendant de toute unité.

Nous pouvons représenter ce nombre par le rapport de deux lignes. Posons

$$\chi = \frac{\zeta}{d}, \tag{9}$$

d étant la distance polaire dont il est parlé au paragraphe précédent et ζ une longueur variable avec la position du poids, c'est-à-dire une fonction de l'abscisse α de ce poids.

Si l'on porte ζ en ordonnée sur la verticale de P, la courbe obtenue est ce que nous appellerons, comme précédemment, la *ligne de poussée*.

THÉORÈME. — *Si, aux divers éléments ds de l'arc* AB (*fig.* 52, p. 127), *on applique les forces verticales connues*

$$\frac{y'\,ds}{I} = \frac{y'\,dx}{I'},$$

la ligne de poussée est une courbe funiculaire de ces forces, tangente en B *à la corde* AB.

Approximativement, c'est le polygone funiculaire des forces en nombre fini

$$\frac{y'}{I}$$

appliquées aux points de division de l'arc et satisfaisant aux conditions suivantes qui le déterminent :

1° *De passer par le point* B;
2° *D'avoir* BA *pour son premier côté;*
3° *D'avoir* $C'\beta$ *pour distance polaire.*

En effet, on a, en général (§ 474),

$$q = \frac{\int \frac{\mu y'}{I} ds}{\int \frac{yy'}{I} ds}.$$

Or, si la charge se réduit au poids P d'abscisse α,

1° Pour $\alpha < x$.......... $\mu = P\frac{l-\alpha}{l}x$

2° Pour $\alpha > x$.......... $\mu = P\frac{\alpha}{l}(l-x)$

Donc

$$\int \frac{\mu y'}{I} ds = \int_0^l \frac{\mu y'}{I} ds = P\left[\frac{l-\alpha}{l}\int_0^\alpha \frac{xy'}{I} ds + \frac{\alpha}{l}\int_\alpha^l (l-x)y\, ds\right]$$

ou

$$\int \frac{\mu y'}{I} ds = P\left[\int_0^\alpha \frac{xy'}{I} ds + \alpha\int_\alpha^l y'\, ds - \frac{\alpha}{l}\int_0^l \frac{xy'}{I} ds\right].$$

Mais on a (§ 473)

$$\int \frac{xy'}{I} ds = 0;$$

ce qui fait disparaître le dernier terme et donne, de plus,

$$\int_0^\alpha \frac{xy'}{I} ds = -\int_\alpha^l \frac{xy'}{I} ds.$$

Par suite

$$\int \frac{\mu y'}{I} ds = P\int_\alpha^l \frac{\alpha - x}{I} y'\, ds$$

et

$$q = P\frac{\int_\alpha^l (\alpha - x)\frac{y'}{I} ds}{\int \frac{yy'}{I} ds} = P\frac{\zeta}{d},$$

d'où

$$(a) \qquad \zeta = \frac{d}{\int \frac{yy'}{I} ds} \times \int_\alpha^l (\alpha - x)\frac{y'}{I} ds.$$

Le premier facteur est une constante, c'est-à-dire une grandeur indépendante de α ou de la position du poids. Le second est, au

signe près, *la somme des moments des forces verticales* $\frac{y'}{I}ds$ *comprises entre le point d'encastrement* B *et la verticale* P.

Cela étant, concevons que l'on construise une courbe funiculaire de toutes les forces $\frac{y'ds}{I}$ passant par le point B et tangente à BA en ce point; l'ordonnée ζ' comprise entre cette courbe et sa tangente BA est proportionnelle à la somme des moments dont il s'agit.

Et l'on a, si d' est la distance polaire de cette courbe,

$$\int_\alpha^l (\alpha - x)\frac{y'}{I}ds = d' \times \zeta'.$$

Donc

$$\zeta = \frac{d \times d'}{\int \frac{yy'}{I}ds}\zeta'.$$

Si donc on choisit d' de façon que

$$\frac{dd'}{\int \frac{yy'}{I}ds} = 1.$$

on aura

$$\zeta = \zeta'.$$

Remplacons l'expression (a) ci-dessus de ζ par sa valeur approchée

$$\zeta = d \times \frac{\Sigma(\alpha - x)\frac{y'}{I}}{\sum \frac{yy'}{I}},$$

et traçons le polygone funiculaire de distance polaire $C'\beta$ des forces en nombre fini $\frac{y'}{I}$ passant par le point B et ayant BA pour premier côté. Soit ζ' l'ordonnée comprise entre le polygone et ce premier côté et d' sa distance polaire, on aura

$$\Sigma(\alpha - x)\frac{y'}{I} = C'\beta \times \zeta'.$$

D'ailleurs on a trouvé au paragraphe précédent

$$\sum \frac{yy'}{I} = d \times C'\beta.$$

d'où

$$\zeta = \zeta'.$$

Remarque. — Toute courbe funiculaire des forces $\frac{y'\,ds}{I}$ passant par le point B et tangente en ce point à BA passe aussi par le point A, car en ce point ($\alpha = 0$) ζ' est tel que

$$\zeta' \times d' = -\int_0^l \frac{xy'}{I}\,ds = 0,$$

d'où

$$\zeta' = 0.$$

De même, le polygone funiculaire par lequel on remplace approximativement cette courbe passant par le point B ayant son premier côté dirigé suivant BA passe par le point A, puisqu'on a déterminé approximativement la ligne de fermeture de l'arc par la condition

$$\sum \frac{xy'}{I} = 0.$$

Or, en A, l'ordonnée de ce polygone est proportionnelle au premier membre de cette équation.

On devait s'attendre, en effet, à ce que la ligne de poussée passât par les appuis A et B et fût tangente à la corde AB au point d'encastrement.

§ 476.

LIGNES D'INFLUENCE. — Supposons un poids $P = 1$ dans une position d'abscisse α et soient respectivement

$$M, \quad M'$$

les moments de flexion qu'il détermine aux points d'abscisse x de l'arc et de la poutre correspondante.

La poussée q qu'il détermine est

$$q = \frac{\zeta}{d}, \tag{10}$$

où $d = C'\beta$ est une longueur connue indépendante de la position du poids.

La formule

$$M = M' - qy'$$

devient

(11) $$M = M' - \frac{y'}{d}\zeta.$$

La ligne dont les abscisses sont α et les ordonnées égales ou proportionnelles à M est la ligne d'influence relative à la section d'abscisse x de l'arc, et celle dont les abscisses sont, de même, α et les ordonnées égales ou proportionnelles à M' représente la ligne d'influence relative à la même section de la poutre droite AB' correspondant à l'arc.

Pour $y' = 0$, on a

(10) $$M = M'.$$

Ainsi, *au point d'intersection de l'arc et de sa ligne de fermeture,* la courbe d'influence de l'arc coïncide avec celle de la poutre droite correspondante; cette dernière, nous savons la tracer (§ 327).

Pour ramener de même le tracé de toutes les autres lignes d'influence de l'arc à celles de la poutre, nous écrirons l'équation (11) ci-dessus sous la forme

$$M \times \frac{d}{y'} = M' \frac{d}{y'} - \zeta,$$

de sorte que, si nous traçons des courbes dont les ordonnées soient celles des lignes d'influence de la poutre droite, amplifiées pour chaque section dans le rapport *constant pour cette section* $\frac{d}{y}$ et que nous appelions η les portions d'ordonnées comprises entre ces lignes et la ligne de poussée, nous aurons

$$M \times \frac{d}{y'} = \eta,$$

$$M = \eta \times \frac{d}{y'},$$

de sorte que les moments de flexion cherchés, que l'unité de poids parcourant l'arc détermine dans une section donnée, sont proportionnels aux longueurs η. On pourra, d'ailleurs, comme

au § 459, étudier l'influence d'un poids unique ou d'un convoi quelconque sur chaque section donnée de l'arc par le seul tracé des lignes d'influence de la poutre correspondant à l'arc.

§ 477.

LIGNES D'INFLUENCE DES EFFORTS TRANCHANTS. — De l'expression de M on tire

$$\frac{dM}{ds} = \frac{dM'}{dx}\frac{dx}{ds} - \frac{1}{d}\frac{dy'}{ds} \times \zeta,$$

où le premier membre représente l'ordonnée de l'effort tranchant produit par l'unité de poids dans la section d'abscisse x.

Pour $\frac{dy'}{ds} = 0$, c'est-à-dire au point de l'arc où la tangente est parallèle à la ligne de fermeture

$$\frac{dM}{ds} = \frac{dM'}{dx}\frac{dx}{ds}.$$

La ligne d'influence relative à ce point de l'arc a ses ordonnées égales à celles de la ligne d'influence relative au point correspondant de la poutre, multipliées par le cosinus constant de l'angle que la tangente à la section considérée fait avec l'axe des x.

On tracera d'abord cette ligne d'influence (§ 328).

Pour $\frac{dy'}{ds} \gtrless 0$, on écrira

$$\frac{d}{\frac{dy'}{ds}}\frac{dM}{ds} = \frac{d}{\frac{dy'}{dx}}\frac{dM'}{dx} - \zeta,$$

et, si l'on multiplie les ordonnées des lignes d'influence par le facteur, constant pour chaque section $\frac{d}{\frac{dy'}{dx}}$, les portions, que nous appellerons η', d'ordonnées comprises entre les lignes obtenues et la ligne de poussée donnent le premier membre, de sorte que

$$\frac{dM}{ds} = \frac{\eta'}{d}\frac{dy'}{ds},$$

d'où l'on déduit les mêmes conséquences qu'au Chapitre précé-

dent pour l'étude des efforts tranchants maxima produits par un mobile unique ou un convoi.

§ 478.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE. — Si l'on reprend les raisonnements du § 472, à l'aide des formules (A') du § 423, dans lesquelles on conserve les termes relatifs à la température, les équations fondamentales deviennent

$$\int \frac{My}{I} ds + E\delta\tau l = 0,$$

$$\int \frac{Mx}{I} ds = 0.$$

On déterminera les lignes de fermeture du polygone funiculaire et de l'arc, comme si l'on faisait abstraction de la température, de sorte qu'on aura

$$M = M' - qy' = q_0 z'_0 - q y'$$

avec les conditions

$$\int \frac{z'_0 x}{I} ds = 0$$

et

$$\int \frac{y' x}{I} ds = 0.$$

La seconde des équations fondamentales se trouve ainsi satisfaite, et la première donne

$$q_0 \int \frac{z'_0 y}{I} ds - q \int \frac{y' y}{I} ds + E\,\delta\tau l = 0,$$

d'où

$$q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0 y}{I} ds}{\int \frac{y' y}{I} ds} + \frac{E\,\delta\tau\, l}{\int \frac{y' y}{I} ds},$$

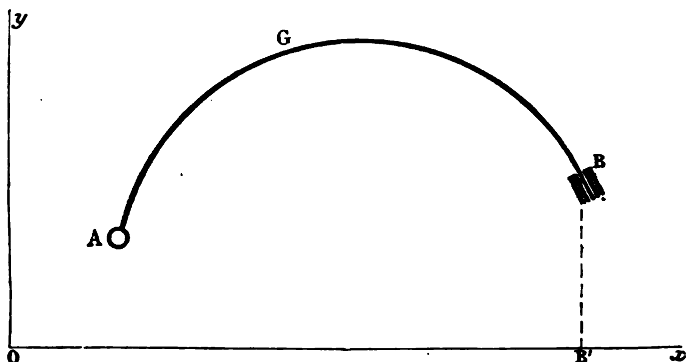
dont le premier terme est celui précédemment construit et le second fournit la poussée produite par la température.

Le dénominateur de ce second terme étant connu par les constructions antérieures, la valeur de ce terme se trouve sans difficulté comme pour les arcs étudiés aux Chapitres précédents.

§ 479.

FORMULES GÉNÉRALES EN AYANT ÉGARD A LA TEMPÉRATURE, A LA COMPRESSION DE LA FIBRE MOYENNE ET A L'EFFORT TRANCHANT. — Soient (*fig.* 53) A le point d'appui simple et B le point d'encastrement.

Fig. 53.



Quelles que soient les charges, verticales ou non, rapportons les divers points de l'arc à deux axes rectangulaires quelconques.

Désignons par l et h les différences $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ des coordonnées des points B et A.

Appliquons les formules générales (A_1) du § 423 à la recherche des composantes u et v et de la rotation Ω de la section B.

On devra faire

$$x = x_0 + l,$$
$$y = y_0 + h.$$

D'ailleurs, u, v, Ω, ainsi que u_0, v_0, sont nuls.

De l'équation qui donne Ω on déduit

$$\Omega_0 = \int \frac{M}{EI} ds,$$

cette intégration, comme celles qui vont suivre, étant à faire dans toute l'étendue de l'arc.

En portant cette valeur de Ω_0 dans les deux autres équations, supposant les coefficients d'élasticité constants et ayant égard

à un erratum indiqué à la suite de la Table des matières, elles deviennent

$$(12)\quad \begin{cases} E\,\delta\tau\, l + \displaystyle\int \frac{M(y-y_0)}{I}\,ds - \int \frac{X}{S}\,ds - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int \frac{T}{S}\,\frac{dy}{ds}\,ds = 0, \\ E\,\delta\tau\, h - \displaystyle\int \frac{M(x-x_0)}{I}\,ds - \int \frac{Y}{S}\,ds + \left(1+\frac{1}{g}\right)\int \frac{T}{S}\,\frac{dx}{ds}\,ds = 0, \end{cases}$$

Ceci posé, soient R et q les composantes, parallèles aux axes des y et des x, de la réaction de l'appui non encastré.

Désignons respectivement par

$$X_v,\quad Y_v,\quad m$$

la somme des projections sur l'axe des x, la somme des projections sur l'axe des y, la somme des moments, relativement au point quelconque $G(x, y)$ de la fibre moyenne, des charges données (abstraction faite de la réaction de l'appui) qui agissent à gauche de ce point. Soit de même T_v ce que deviendrait T si cette réaction n'existait pas, c'est-à-dire si l'on avait $R = q = 0$, en sorte que X_v, Y_v, m, T_v sont quatre fonctions connues des coordonnées x et y du point G.

Ces quatre fonctions, on peut les calculer séparément ou se borner à calculer m, d'où l'on tirera

$$X_v = -\frac{\partial m}{\partial y},\qquad Y_v = \frac{\partial m}{\partial x},\qquad T_v = -X_v\frac{dy}{ds} + Y_v\frac{dx}{ds} = \frac{dm}{ds}.$$

Si les charges sont verticales, ainsi que l'axe des y, et que l'on désigne par P l'une d'elles, par α son abscisse, on aura

$$(14)\quad X_v = 0,\qquad Y_v = -\sum_g P,\qquad T_v = -\frac{dx}{ds}\sum_g P,\qquad m = \sum_g P(\alpha - x),$$

$\sum_g$ désignant des sommes s'étendant à toutes les charges placées à gauche du point G, de sorte que, s'il n'y a qu'une charge, pour les points G situés à gauche de cette charge,

$$X_v = Y_v = T_v = m = 0;$$

pour les points G situés à sa droite,

$$(14\ bis)\quad X_v = 0,\qquad Y_v = -P,\qquad T_v = -P\frac{dx}{ds},\qquad m = P(\alpha - x).$$

D'autre part, on a, quelles que soient les charges,

$$X = X_v + q, \qquad Y = Y_v + R,$$

$$T = T_v - q\frac{dy}{ds} + R\frac{dx}{ds}, \qquad M = m + R(x - x_0) - q(y - y_0).$$

Si donc on désigne par les lettres H_1, H_2 les valeurs connues que prennent les premiers membres des équations (12), lorsqu'on y remplace les lettres X, Y, T, M respectivement par X_v, Y_v, T_v, m, on aura

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &H_1 + R\left[\int\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{I}ds - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{1}{S}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}ds\right] \\ &\quad - q\left[\int\frac{(y-y_0)^2}{I}ds + \int\frac{ds}{S} - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{1}{S}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds\right] = 0, \\ &H_2 - R\left[\int\frac{(x-x_0)^2}{I}ds + \int\frac{ds}{S} - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{1}{S}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds\right] \\ &\quad + q\left[\int\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{I}ds - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{1}{S}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}ds\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

équations qui fournissent les inconnues R et q.

§ 480.

CAS D'UN ARC SYMÉTRIQUE. — Considérons d'abord (*fig.* 54, p. 141) le cas usuel d'un arc symétrique par rapport à la verticale de son sommet et soumis à des charges verticales quelconques.

Déterminons ce qu'au § 469 nous avons appelé le centre de gravité G de la fibre moyenne et prenons ce point pour origine des coordonnées, l'axe des y étant vertical ascendant.

On aura

$$\int\frac{x\,ds}{I} = 0, \qquad \int\frac{y\,ds}{I} = 0,$$

$$x_1 = -x_0 = \frac{l}{2}, \qquad y_1 = y_0 = -\text{GD}, \qquad h = y_1 - y_0 = 0,$$

D'ailleurs, à cause de la symétrie,

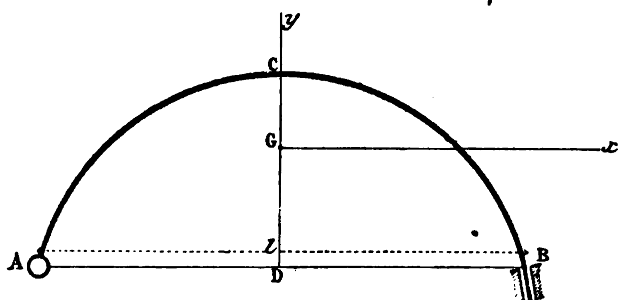
$$\int\frac{xy}{I}ds - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int\frac{\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}}{S}ds = 0.$$

Enfin

$$(16')\quad \begin{cases} H_1 = E\,\delta\tau\,l + \displaystyle\int \frac{m(y-y_0)}{I}\,ds + \left(1+\frac{1}{g}\right)\int \frac{\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}}{S} \sum_g P\,ds, \\ H_2 = -\displaystyle\int \frac{m(x-x_0)}{I}\,ds - \int \left(1+\frac{1}{g}\right) \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - 1}{S} \sum_g P\,ds. \end{cases}$$

Si l'on admet les formules approchées consistant à négliger

Fig. 54.



l'effort tranchant, on aura

$$(16'')\quad \begin{cases} H_1 = E\,\delta\tau\,l + \displaystyle\int \frac{m(y-y_0)}{I}\,ds, \\ H_2 = -\displaystyle\int \frac{m(x-x_0)}{I}\,ds + \int \frac{1}{S} \sum_g P\,ds, \end{cases}$$

formules faciles à construire ou à calculer suivant les remarques faites à la fin du Chapitre précédent.

§ 481.

Cas général. — Dans le cas d'un arc dissymétrique, il est plus avantageux de prendre l'appui simple A pour origine des coordonnées (*fig.* 55).

On prendra pour axes les axes principaux d'inertie *composés* (§ 471) de la fibre moyenne relatifs au point A si l'on conserve tous les termes, et les axes principaux d'inertie ordinaires si l'on néglige les termes de l'ordre de l'effort tranchant.

Dans les formules générales (15) du § 479 on devra faire

$x_0 = y_0 = 0$, et, de plus,

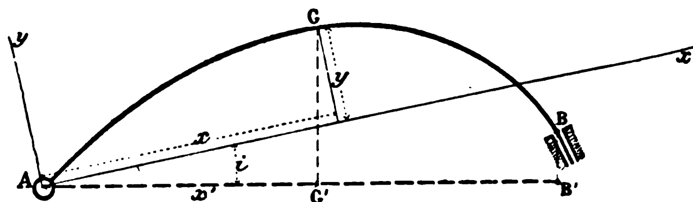
$$\int \frac{xy}{I} ds - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \int \frac{\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}}{S} ds = 0;$$

par suite, les équations (15) donnent directement R et q, à savoir

$$(16) \quad \begin{cases} q = \dfrac{H_1}{\int \frac{y^2}{I} ds - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{ds}{S} + \int \frac{ds}{S}}, \\ R = \dfrac{H_2}{\int \frac{x^2}{I} ds - \left(1+\frac{1}{g}\right)\int \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{ds}{S} + \int \frac{ds}{S}}. \end{cases}$$

Pour calculer m, dans le cas des charges verticales, soient x et y les coordonnées d'un point quelconque G de la fibre moyenne

Fig. 55.



et x' l'abscisse de ce point comptée suivant l'horizontale du point A; m sera une fonction connue de x', à savoir, celle obtenue en remplaçant, dans la dernière (14), les abscisses x et α par celles x' et α' comptées suivant l'axe horizontal Ax'.

Or, si i est l'inclinaison de l'axe Ox, on aura, comme

$$x' = x \cos i - y \sin i,$$

d'où

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{dm}{dx'} \cos i, \qquad \frac{\partial m}{\partial y} = -\frac{dm}{dx'} \sin i,$$

$$\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dx'}\left(\frac{dx}{ds}\cos i - \frac{dy}{ds}\sin i\right).$$

Par suite (479),

$$H_1 = E\delta\tau l + \int \frac{my}{I} ds - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\int \frac{\frac{dy}{ds}}{S}\frac{dm}{ds} ds - \sin i \int \frac{1}{S}\frac{dm}{dx'} ds,$$

$$H_2 = E\delta\tau h - \int \frac{mx}{I} ds + \left(1 + \frac{1}{g}\right)\int \frac{\frac{dx}{ds}}{S}\frac{dm}{ds} ds - \cos i \int \frac{ds}{S}\frac{dm}{dx'},$$

où l'on remplacera m par sa valeur

$$m = \sum_g P(\alpha' - x'),$$

puis $\frac{dm}{ds}$ et x' par les valeurs qui viennent d'être indiquées.

Ces formules deviennent très simples si l'on néglige les termes ayant $1 + \frac{1}{g}$ pour coefficient, c'est-à-dire ceux de l'ordre de l'effort tranchant.

Leur construction donne lieu aux mêmes remarques que celle des formules analogues du Chapitre précédent.

CHAPITRE IV.

ARCS AVEC CHARNIÈRES.

§ 482.

DIVISION DU PROBLÈME. — Lorsqu'un arc comporte au moins trois charnières (y compris les rotules ou tourillons fixes, s'il y en a), quelles que soient les charges qui le sollicitent, le tracé du polygone des pressions est un problème de pure Statique dont nous avons indiqué la solution dans la première Partie de cet Ouvrage; par suite, la détermination des moments de flexion et efforts tranchants dérive aussi des seuls principes de la Statique.

Nous n'avons donc ici à envisager que les cas où il existe en tout (y compris les tourillons fixes) soit une, soit deux charnières. Cela comprend donc :

A. L'arc encastré à ses deux extrémités, portant une charnière;

B. L'arc encastré à ses deux extrémités, portant deux charnières;

C. L'arc encastré à l'une de ses extrémités, appuyé sur rotule à l'autre et muni d'une charnière.

A. — ARC ENCASTRÉ A SES DEUX EXTRÉMITÉS, PORTANT UNE CHARNIÈRE.

§ 483.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si, aux divers éléments de la fibre moyenne d'un arc de section et d'élasticité constantes ou variables, soumis à des charges quelconques (verticales ou non), encastré à ses deux extrémités et portant une charnière, on applique des forces parallèles* $\frac{M\,ds}{EI}$, *le centre de ces forces parallèles coïncide avec la charnière* (1).

(1) Ce théorème suppose qu'on néglige la compression de la fibre moyenne et l'effort tranchant.

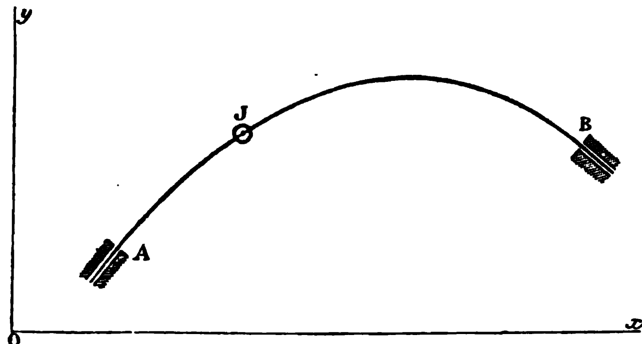
Soit (*fig.* 56) AJB l'arc encastré en ses deux extrémités A et B et portant une charnière en J.

Rapportons-le à deux axes rectangulaires quelconques.

Désignons par x_0, y_0 ; x_1, y_1 les coordonnées des points A et B, par ξ et η celles du point J.

Soit σ l'arc AJ.

Fig. 56.



Si l'on regarde ce point comme appartenant à l'arc AJ, les composantes u et v de son déplacement données par les équations (A) du § 423, où l'on fera $u_0 = v_0 = \Omega_0 = 0$, $y = \eta$, $s = \sigma$, sont

$$(1) \qquad u = -\int_0^\sigma \frac{M}{EI}(\eta - y)\,ds,$$

$$(2) \qquad v = \int_0^\sigma \frac{M}{EI}(\xi - x)\,ds.$$

Si l'on considère l'arc JB et qu'on applique les mêmes équations (A) au point B (en sorte que les premiers membres de ces équations sont nuls), en remplaçant dans les seconds les lettres u_0, v_0 ; x_0, y_0, respectivement par celles u, v, ; ξ, η et, pour la symétrie, la lettre Ω_0 par celle Ω, on aura

$$0 = \Omega - \int_\sigma^s \frac{M}{EI}\,ds,$$

$$0 = u + \Omega(y_1 - \eta) - \int_\sigma^s \frac{M}{EI}(y_1 - y)\,ds,$$

$$0 = v - \Omega(x_1 - \xi) + \int_\sigma^s \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,ds,$$

en désignant par s la longueur totale de l'arc.

A cause de la première, les deux dernières deviennent

$$(1') \qquad 0 = u - \eta \int_\sigma^s \frac{M}{EI}\,ds + \int_\sigma^s \frac{M}{EI} y\,ds,$$

$$(2') \qquad 0 = v + \xi \int_\sigma^s \frac{M}{EI}\,ds - \int_\sigma^s \frac{M}{EI} x\,ds.$$

En ajoutant les équations (1) et (1′) et celles (2) et (2′), il vient

$$0 = -\eta \int_0^s \frac{M}{EI}\,ds + \int_0^s \frac{M}{EI} y\,ds,$$

$$0 = \xi \int_0^s \frac{M}{EI}\,ds - \int_0^s \frac{M}{EI} x\,ds,$$

soit

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi \displaystyle\int_0^s \frac{M}{EI}\,ds = \int_0^s \frac{M}{EI} x\,ds, \\ \eta \displaystyle\int_0^s \frac{M}{EI}\,ds = \int_0^s \frac{M}{EI} y\,ds, \end{cases}$$

qui expriment bien que le point J, dont les coordonnées sont ξ et η, est le centre des forces parallèles $\frac{M\,ds}{EI}$.

Remarques. — Si l'on prend la charnière J pour origine des coordonnées, $\xi = \eta = 0$ et les équations (3) deviennent

$$(3') \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{M\,ds}{EI} x = 0, \\ \displaystyle\int \frac{M\,ds}{EI} y = 0. \end{cases}$$

Si le coefficient d'élasticité E est constant, il disparaît des équations (3) et (3′) et le théorème s'applique aux forces $\frac{M\,dx}{I}$; si, de plus, la section de l'arc est constante, I disparaît également et le théorème s'applique aux forces M ds; si enfin l'on suppose que $I' = I\frac{dx}{ds}$ puisse être regardé comme sensiblement constant, les équations deviennent

$$(3'') \qquad \begin{cases} \xi \int M\,dx = \int Mx\,dx, \\ \eta \int M\,dx = \int My\,dx \end{cases}$$

et le théorème s'applique aux forces M dx.

§ 484.

EMPLOI DU THÉORÈME FONDAMENTAL. — Le théorème précédent, développé soit analytiquement, soit graphiquement, fournit le moment de flexion aux divers points d'un arc comme celui que nous venons de considérer.

En effet, le polygone des pressions est (§ 473) assujetti à passer par la charnière.

Donc, deux autres conditions suffisent à le déterminer et ces deux conditions sont fournies par les deux équations qui expriment analytiquement le théorème fondamental.

§ 485.

APPLICATION DE LA MÉTHODE D'EDDY. — Soient AJCB (*fig.* A, *Pl. XXXV*) l'arc considéré, et J sa charnière. Nous le supposons soumis à des forces verticales quelconques.

Considérons la poutre droite correspondante AJ'B, c'est-à-dire une poutre ayant un moment d'inertie $I' = I\frac{dx}{ds}$ encastrée à ses deux extrémités A et B et présentant une charnière au point J' correspondant à J, de sorte que le moment de flexion en ce point J' est nul, quelles que soient les charges agissant sur la poutre.

Supposons-la d'abord soumise aux charges qui agissent sur l'arc.

Traçons (*fig.* A_0) un polygone funiculaire quelconque

$$\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$$

de ces charges.

Soient q_0 la distance polaire arbitrairement choisie de ce polygone et J_0 le point où il est coupé par la verticale de la charnière.

Si $a_0 b_0$ est la ligne de fermeture du polygone et si l'on désigne par z'_0 les verticales comptées depuis cette ligne, le moment de flexion M' en un point quelconque de la poutre a pour expression

$$(1) \qquad M' = q_0 z'_0.$$

D'ailleurs, comme le moment de flexion est nul au point J', la

ligne cherchée passe nécessairement par le point J_0 et sa direction est seule inconnue.

Pour la déterminer, nous observons que le théorème fondamental (§ 472) applicable à un arc quelconque s'applique aussi à une poutre droite.

Des forces fictives

$$\frac{M'\,dx}{I'} = \frac{M'\,ds}{I}$$

appliquées à la poutre doivent donc avoir leur centre au point d'articulation J'.

Mais, comme ici les points d'application des forces sont en ligne droite, une seule condition suffit pour cela; analytiquement, elle est soit

$$(5) \qquad \xi \int \frac{M'\,dx}{I'} = \int \frac{M\,dx}{I'}\,x,$$

où les intégrations s'étendent à toute la poutre, soit

$$(5') \qquad \xi \int \frac{M'\,ds}{I} = \int \frac{M'\,ds}{I}\,x,$$

où elles s'étendent à toute la longueur de l'arc, et c'est cette équation qui permet de déterminer graphiquement la direction de la ligne de fermeture; les forces

$$\frac{M'}{I'}\,dx$$

ou celles proportionnelles

$$\frac{z'_0}{I'}\,dx,$$

supposées verticales, doivent avoir pour résultante la verticale du point J_0.

Supposons d'abord I' constant. Alors les forces fictives verticales

$$z'_0\,dx$$

doivent avoir leur résultante passant par ce point.

En d'autres termes, si l'on considère une force descendante S_1 égale ou proportionnelle à l'aire comprise entre le polygone funiculaire et sa corde $\alpha_0\beta_0$, appliquée en son centre de gravité, et une force ascendante égale au trapèze $a_0\,b_0\,\alpha_0\,\beta_0$, appliquée également

en son centre de gravité, la résultante de ces deux forces doit passer par le point J_0.

Par ce point, menons une droite $\alpha'_0 \beta'_0$ parallèle à la corde $\alpha_0 \beta_0$. La force ascendante peut être remplacée par trois autres, à savoir :

1° Une force S_2 égale ou proportionnelle à l'aire du parallélogramme $\alpha_0 \beta_0 \alpha'_0 \beta'_0$, appliquée suivant la verticale de son centre de gravité, soit suivant la verticale du milieu de la corde. Cette force, comme celle descendante S_1, est connue;

2° Deux forces respectivement égales ou proportionnelles aux aires des deux triangles $J_0 b_0 \beta'_0$ et $J_0 a_0 \alpha'_0$, appliquées suivant les verticales de leurs centres de gravité, c'est-à-dire suivant les verticales v_1 et v_2 placées l'une au tiers de la longueur $\alpha'_0 J_0$ à partir de α'_0, l'autre au tiers de la longueur $\beta'_0 J_0$ à partir de β'_0, en sorte que les lignes d'action de ces deux forces sont connues, mais non leurs grandeurs. L'une d'elles est descendante, l'autre ascendante. Si la figure est exacte, c'est la force v_2 qui est descendante et la force v_1 ascendante.

Ainsi, pour celle de ces deux forces qu'on trouvera descendante, on devra porter l'ordonnée $\beta'_0 b_0$ de haut en bas, et, pour celle que l'on trouvera ascendante, on devra la porter de bas en haut à partir de la droite connue $\alpha'_0 \beta'_0$.

Si l'on ne connaît pas les deux forces v_1 et v_2 proportionnelles à ces triangles, on connaît du moins leur rapport; car les deux triangles étant semblables, leurs aires sont entre elles comme les carrés de leurs dimensions homologues; soit, en appelant v_1 et v_2 les grandeurs des forces dirigées suivant les verticales des deux points que désignent ces lettres

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\overline{\alpha'_0 J_0}^2}{\overline{J_0 \beta'_0}^2}.$$

Menons (*fig.* A) une droite $J'p'$ de direction arbitraire.

Prenons $J'A_1 = J'A$. Décrivons les arcs de cercle $A_1 A'_1$, BB' jusqu'à leurs rencontres avec la droite $J'p'$ et conduisons les diagonales $A_1 B'$ et $A'_1 B$. Puis, prenant sur la droite $J'p'$ une longueur arbitraire $J'p$, menons pp_1 parallèle à la diagonale $A'_1 B$ et $p_1 p'$

parallèle à celle A_1B'. On aura

$$\frac{J'p'}{J'p} = \frac{\overline{J'A_1}^2}{\overline{J'B}^2} = \frac{\overline{J'A}^2}{\overline{J'B}^2} = \frac{\overline{J_0\alpha'_0}^2}{\overline{J_0\beta'_0}^2}.$$

Donc

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{J'p}{J'p'}.$$

La résultante des forces v_1 et v_2 parallèles et de sens contraires passe en un point V placé en dehors des verticales v_1 et v_2 et tel que

$$\frac{Vv_2}{Vv_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{J'p}{J'p'},$$

d'où

$$\frac{Vv_2}{v_1v_2} = \frac{J'p}{J'p + J'p'}.$$

Faisons

$$p'p'' = J'p,$$

en sorte que

$$\frac{Vv_2}{v_1v_2} = \frac{J'p}{J'p''}.$$

Prenons sur la ligne $J'B$ une longueur $J'q'' = v_1v_2$; joignons $p''q''$ et menons pq parallèle à cette ligne; on aura

$$Vv_2 = J'q.$$

Nous connaissons donc ainsi la ligne d'action V de la résultante des forces v_1 et v_2; appelons V cette résultante inconnue.

D'après ce qui précède, la résultante des trois forces S_1, S_2, V doit passer par le point J_0 ou, ce qui revient au même, les deux forces connues S_1 et S_2 peuvent être équilibrées par deux forces dont les lignes d'action sont les verticales V et J_0, et de là résulte qu'on peut trouver les grandeurs de ces deux forces.

Soit h_1 la hauteur d'un triangle de base $l = AB$ équivalent à l'aire comprise entre le polygone funiculaire et sa corde et posons $h_2 = 2\alpha_0\alpha'_0$, en sorte que h_2 est aussi la hauteur d'un triangle de base l équivalent au rectangle $\alpha_0\alpha'_0\beta_0\beta'_0$.

Les longueurs h_1 et h_2 représentent les forces S_1 et S_2 que nous désignons par $1'$ et $2'$; soient $3'$ et $4'$ les forces inconnues V et J_0.

Portons bout à bout (*fig. a*) les forces $h_1 = 1'$ et $h_2 = 2\alpha_0\alpha'_0 = 2'$, la première descendante à partir du point a, la seconde ascendante aboutissant en b.

Prenons un pôle quelconque O et menons les rayons polaires Oa, $O(1'2)$ et Ob, Oc. Puis (*fig.* A_1) d'un point quelconque $4'$ pris sur la verticale de J, menons $4'1'$ parallèle à Oa, $1'2'$ parallèle au rayon $1'2'$ ou Oc et $2'3'$ parallèle au rayon Ob. Joignons $3'4'$ et menons le rayon $O\omega$ parallèle à cette ligne. On aura

$$\omega b = V.$$

Nous avons ainsi la résultante des forces v_1 et v_2 proportionnelles aux triangles $J_0 b_0 \beta'_0$ et $J_0 a_0 \alpha'_0$.

Pour avoir ces deux forces, prolongeons les deux côtés du polygone funiculaire aboutissant en $3'$ jusqu'aux verticales v_2 et v_1 en $2''$ et $4''$. Joignons les points $2''$ et $4''$ et menons le rayon polaire $O\varepsilon$ parallèle à cette ligne.

On aura

$$\varepsilon b = v_2 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\omega = v_1.$$

On voit de plus que la force v_2 est descendante. Toutes les aires étant rapportées à la base $\frac{l}{2}$, l'aire du triangle $J_0 \beta'_0 b_0$ est, par suite, représentée par le produit

$$\varepsilon b \times \frac{l}{2}.$$

Prenons $\beta'_0 \beta''_0 = \varepsilon b$, cette longueur étant portée de haut en bas en vertu d'une remarque faite plus haut, puisque v_2 est une force descendante.

Le triangle $\alpha'_0 \beta'_0 \beta''_0$ est donc équivalent à celui $J_0 \beta'_0 b_0$. Donc si l'on joint les deux points J_0 et β''_0 et que, par le point α'_0, on mène une parallèle à cette ligne, cette parallèle coupera la verticale du point B au point b_0, et en joignant le point b_0 au point J_0, on aura la ligne de fermeture $a_0 J_0 b_0$.

Supposons à présent qu'au lieu des charges données, admettant le polygone $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$ pour polygone funiculaire, on applique à la poutre AB des forces fictives verticales admettant l'arc donné AJB pour courbe funiculaire.

On déterminera la ligne de fermeture aJb correspondant à ces nouvelles forces exactement comme on a déterminé celle $a_0 J_0 b_0$.

Soient y' les ordonnées comprises entre l'arc et cette ligne de

fermeture. Si l'on pose

$$M = M' - qy'$$

ou

$$M = q_0 z'_0 - qy',$$

quelle que soit la constante q, les forces verticales $M\,dx$ et, par suite, des forces verticales $\frac{M}{I'}dx = \frac{M}{I}ds$ (I' étant supposé constant), appliquées à l'arc, admettront une résultante passant par le point J, puisque les forces verticales $z'_0\,dx$ et $y'\,dx$ admettent de telles résultantes.

Donc, pour que le centre des forces parallèles $\frac{M}{I'}dx$ ou $M\,dx$ passe par le point J, il suffit que

$$\int My\,dx = 0,$$

en désignant par y les ordonnées positives ou négatives de l'arc comptées depuis l'horizontale du point J, ou

$$q_0 \int z'_0 y\,dx = q \int y' y\,dx;$$

d'où

$$q = q_0 \frac{\int z'_0 y\,dx}{\int y' y\,dx},$$

expression que l'on construira d'après les mêmes principes que les expressions analogues trouvées dans les problèmes précédents.

Supposons, pour fixer les idées, l'arc ACB symétrique par rapport à la verticale CD.

Menons par le sommet C l'horizontale A″B″ tangente à l'arc.

Concevons que la corde AB soit divisée en parties égales Δx et que, par les points de division, on élève des verticales qui déterminent des points correspondants dans l'arc et dans les polygones funiculaires (ces points ne sont pas marqués). Appelons z'_0 et z''_0 les ordonnées z'_0 comprises entre le polygone funiculaire et la ligne $a_0 b_0$ répondant à deux points de division symétriques par rapport à la verticale CD et de même y' et y'' les ordonnées de deux pareils points de l'arc, comptées de la ligne ab.

Appelons toujours y les ordonnées de l'arc comptées depuis sa corde AB.

On pourra écrire approximativement

$$q = q_0 \frac{\sum \frac{z'_0 + z''_0}{2} y}{\sum \frac{y' + y''}{2} y},$$

les sommes Σ s'étendant seulement à une moitié de l'arc.

Portons bout à bout des forces proportionnelles aux longueurs $\frac{y'+y''}{2}$ en suivant les points de division du demi-arc BC de sa naissance B à son sommet et portant dans le sens CB″ celles qui ont des valeurs négatives, ce qui a lieu pour les premières forces portées, celles répondant aux points de division placés près des naissances, et en sens opposé, les autres.

Soit β'_0 l'extrémité du polygone ainsi obtenu. Traçons le polygone funiculaire correspondant Dβ en prenant le point D pour pôle et pour point de départ, de sorte que le premier côté du polygone funiculaire est vertical. Prolongeons le dernier côté $\beta\beta'$ parallèle au rayon polaire extrême Dβ'_0 jusqu'à sa rencontre en β' avec l'horizontale A′B′ passant par le point J.

Construisons de même le polygone funiculaire D$\gamma\gamma'$ des forces proportionnelles à $\frac{z'_0 + z''_0}{2}$.

Le numérateur de l'expression de q étant la somme des moments de forces horizontales $\frac{z'_0 + z''_0}{2}$ appliquées aux points de division par rapport au point J, on a

$$\sum \frac{z'_0 + z''_0}{2} y = \mathrm{CD} \times \mathrm{C}'\gamma'.$$

De même

$$\sum \frac{y' + y''}{2} y = \mathrm{CD} \times \mathrm{C}'\beta',$$

d'où

$$q = q_0 \frac{\mathrm{C}'\gamma'}{\mathrm{C}'\beta'}.$$

Si l'on prend la distance polaire q_0 qui est arbitraire, égale à C′β', qu'on peut déterminer avant toute autre opération, on aura

$$q = \mathrm{C}'\gamma'$$

pour la poussée de l'arc ou distance polaire du polygone des pressions.

Soit J'_0 le second point d'intersection de la ligne $a_0 b_0$ (*fig.* A_0) avec le polygone funiculaire $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$.

Projetons ce point en J'' sur la ligne ab.

Le polygone des pressions est le polygone funiculaire des forces données de distance polaire q et passant par les deux points J et J''.

Remarque. — Au lieu de considérer les forces S_1 et S_2, il suffit d'observer que leur résultante représente les aires positives ou négatives connues comprises entre le polygone funiculaire et la droite $\alpha'_0 \beta'_0$.

Si l'on divise la droite AB en parties égales, qu'on mène les verticales correspondant aux points de division et qu'on désigne par z les ordonnées déterminées entre le polygone et la droite $\alpha'_0 \beta'_0$, cette aire sera approximativement

$$\Sigma z \Delta x = \Delta x \Sigma z.$$

Il suffira donc de porter bout à bout des forces égales ou proportionnelles aux ordonnées z, de haut en bas ou de bas en haut suivant que le périmètre du polygone est au-dessus ou au-dessous de la droite $\alpha'_0 \beta'_0$.

§ 486.

CAS PARTICULIER OU LA CHARNIÈRE EST A LA CLEF. — Dans le cas usuel où la charnière J coïncide avec le sommet C de l'arc, les opérations précédentes subissent de notables simplifications :

1° La ligne de fermeture ab de l'arc est évidemment la tangente $A''B''$ au sommet C; car, par raison de symétrie, la résultante de forces verticales $\frac{y' dx}{I}$ appliquées à l'arc, y' étant les ordonnées comprises entre l'arc et la droite $A''B''$, passe par le point C. *Ceci reste vrai, même si l'arc est de structure telle que* I' *soit variable.* Cette droite est ainsi connue d'avance.

2° Les points β' et γ' coïncident avec β et γ.

3° En ce qui touche la détermination de la ligne de fermeture $a_0 b_0$ du polygone, comme le point J_0 coïncide avec C_0, les tri-

angles $a_0 \alpha'_0 J_0$ et $b_0 J_0 \beta'_0$ sont égaux, les verticales v_1 et v_2 passent au $\frac{1}{6}$ de la longueur de la corde AB à partir de chacune de ses extrémités; de plus les deux forces v_1 et v_2, proportionnelles aux deux triangles dont nous venons de parler, sont égales, parallèles et de sens contraires et forment un couple; leur résultante passe à l'infini.

Mais on peut les déterminer directement.

Il s'agit d'équilibrer la résultante des deux forces S_1 et S_2, l'une proportionnelle à l'aire du polygone funiculaire, l'autre au parallélogramme $\alpha_0 \alpha'_0 \beta_0 \beta'_0$ dont le côté $\alpha'_0 \beta'_0$ passe maintenant en C_0, par trois forces dont les lignes d'action sont les verticales

$$v_1, \quad v_2, \quad C_0,$$

sachant de plus que les deux premières sont égales et de sens opposés.

Appelons $1'_1$, $2'_1$ les forces données S_1 et S_2 et respectivement

$$3'_1, \quad 4'_1, \quad 5'_1$$

les trois forces inconnues dont les deux premières forment un couple.

Portons bout à bout (*fig.* a_1) les forces données $S_1 = 1'_1$ et $S_2 = 2'_1$ à partir d'un point a. Supposons, pour un instant, connues les trois autres forces, portons-les aussi bout à bout, à savoir $b\omega = 3'_1$, puis $\omega b = 4'_1$ et $ba = 5'_1$; puisque les cinq forces se font équilibre, leur polygone doit se fermer.

Donc, toute la difficulté consiste à trouver le point ω.

Prenons un pôle O (*fig.* a_1). D'un point $5'_1$ (*fig.* A_1) pris arbitrairement sur la force C_0 qui porte ce numéro, menons $5'_1 1'_1$ parallèle au rayon polaire *connu* Oa ou $5'_1 1'_1$; puis $1'_1 2'_1$ parallèle au rayon $1'_1 2'_1$ *également connu;* $2'_1 3'_1$ parallèle au rayon Ob qui est de même connu, $3'_1 4'_1$ parallèle au rayon inconnu Oω; si nous joignons $4'_1 5'_1$, cette ligne doit être parallèle au rayon Ob ou $2'_1 3'_1$.

Ainsi, après avoir tracé le contour $5'_1 1'_1 2'_1 3'_1$, on mènera $5'_1 4'_1$ parallèle à $2'_1 3'_1$, on joindra les points $4'_1$ et $3'_1$ et l'on mènera le rayon Oω parallèle à la ligne ainsi obtenue. On aura donc

$$v_1 = b\omega;$$

par suite, le triangle $b_0 J_0 \beta'_0$ qui serait ici $b_1 C_0 \beta'_1$ aurait pour aire

$$b\omega \times \frac{l}{2};$$

d'où

$$b\omega \times \frac{l}{2} = \beta'_1 b_1 \times \frac{l}{4}$$

ou

$$\beta'_1 b_1 = 2 b\omega,$$

ce qui détermine la ligne de fermeture $a_1 b_1$.

§ 487.

CAS OÙ I' EST VARIABLE. — Si I' ne peut pas être considéré comme constant dans toute l'étendue de l'arc, on le divise comme il a été indiqué plusieurs fois en un petit nombre de parties dans chacune desquelles il puisse être regardé comme constant et l'on amplifiera les ordonnées du polygone funiculaire et de l'arc dans les rapports 1 : I'. Ainsi, admettons que I' puisse être regardé comme constant de C en B et aussi de C en A, mais que dans cette dernière moitié sa valeur soit en moyenne les $\frac{2}{3}$ de celle qu'elle a entre C et B.

Prenons comme unité la valeur de I' entre C et B. Alors, entre ces deux points, en appelant z_0 les ordonnées du polygone funiculaire comptées depuis sa corde $\alpha_0 \beta_0$, on aura

$$\frac{z_0}{I'} = z_0, \qquad \frac{y_0}{I'} = y_0.$$

Entre C et A, on aura

$$\frac{z_0}{I'} = \frac{3}{2} z_0, \qquad \frac{y_0}{I'} = \frac{3}{2} y_0.$$

Les modifications qui en résultent dans la détermination de la ligne de fermeture $a_0 b_0$ sont les suivantes :

1° Prenons (*fig.* A_0) $C_0 D'_0 = \frac{3}{2} C_0 D_0$ et joignons $D'_0 \alpha_0$. La force descendante S_1 représente l'aire comprise entre le polygone funiculaire et le contour brisé $\beta_0 D_0 D'_0 \alpha_0$, au lieu de celle comprise entre le polygone et la corde ; mais, comme cette aire est remplacée pratiquement par les aires partielles déterminées par des ordon-

nées équidistantes et que la force S_1 est remplacée par des forces égales ou proportionnelles à ces ordonnées, l'opération à faire n'est ni plus ni moins longue, que I' soit constant dans toute l'étendue de l'arc ou non.

La même remarque s'applique à l'opération suivante.

2° Prenons $\alpha_0 \alpha''_0 = \frac{3}{2}\alpha_0\alpha'_0$ et menons $\alpha''_0 h'_0$ parallèle à $\alpha_0 \beta_0$ ou, ce qui revient au même, à $\alpha'_0 \beta'_0$ jusqu'à la verticale du milieu de cette ligne.

La force ascendante S_2 représente l'aire $\alpha_0\alpha''_0 h'_0 h_0 \beta'_0 \beta_0 D_0 \alpha_0$ au lieu de l'aire du parallélogramme $\alpha_0\alpha'_0\beta_0\beta'_0$.

3° Les verticales v_1 et v_2 se trouvent aux tiers de $\alpha'_0 J_0$ et de $\beta'_0 J_0$ comme étant les verticales des centres de gravité de deux triangles $J_0 a_0 \alpha'_0$ et $J_0 b_0 \beta'_0$. Les ordonnées comprises entre les droites $a_0 b_0$ et $\alpha'_0 \beta'_0$ ne changent pas sur la moitié de droite de la figure et sont à amplifier dans le rapport 3:2 sur la moitié de gauche.

Cela ne change pas la verticale v_1; pour avoir la nouvelle verticale v_2, à partir d'un point quelconque de la verticale de J, par exemple, à partir de J', menons la droite arbitraire $J'dB_1$ qui coupe la verticale du sommet C en d et la verticale de l'appui B en B_1. Prenons $Dd_1 = \frac{3}{2}Dd$.

La verticale v_1 sera celle du centre de gravité de l'aire

$$J'BB_1 dd_1 J',$$

laquelle est formée des deux triangles $J'BB_1$ et $\frac{1}{2}J'Dd$; la verticale de son centre de gravité ne dépend pas de l'inclinaison admise pour la droite J'B. De plus, le rapport des forces v_1 et v_2 est

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\text{aire } J'BB_1 dd_1 J'}{\text{tr.} AJ'a_1}$$

ou

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\text{tr.} J'BB_1 + \frac{1}{2}\text{tr.} J'Dd}{\text{tr.} AJ'a_1},$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{2}J'B \times BB_1 + \frac{1}{4}J'D \times Dd}{\frac{1}{2}J'A \times Aa_1}.$$

Mais

$$\frac{BB_1}{J'B} = \frac{Dd}{J'D} = \frac{Aa_1}{J'A};$$

d'où

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\overline{J'B}^2 + \frac{1}{2}\overline{J'D}^2}{\overline{J'A}^2},$$

au lieu qu'on avait dans le cas précédemment considéré

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\overline{J'B}^2}{\overline{J'A}^2}.$$

Ce nouveau rapport est facile à construire et permet de trouver la nouvelle verticale V, comme dans le cas où I était constant.

4° Les mêmes modifications interviennent dans la détermination de la ligne de fermeture ab de l'arc. Mais, si la structure de l'arc est symétrique et la charnière au sommet, cette dernière ligne est toujours $A''B''$.

5° Enfin on aura

$$q = q_0 \frac{\sum \frac{z'_0}{I'}}{\sum \frac{y'y}{I'}},$$

les sommes Σ s'étendant à tout l'arc, soit

$$q = q_0 \frac{\sum \frac{z'_0 + \frac{1}{2} z''_0}{2} y}{\sum \frac{y' + \frac{1}{2} y''}{2} y},$$

les sommes Σ s'étendant à une moitié de l'arc, de sorte que ce sont des forces horizontales proportionnelles à $\frac{z'_0 + \frac{1}{2} z''_0}{2}$ et $\frac{1}{2}(y' + \frac{1}{2} y'_0)$ dont on construira les polygones funiculaires $D\gamma$ et $D\beta$, au lieu de celles $\frac{z'_0 + z''_0}{2}$ et $\frac{y'_0 + y''_0}{2}$, z'_0, y'_0 se rapportant à la moitié de droite de l'arc et z''_0, y''_0 à la moitié de gauche.

§ 488.

LIGNE DE POUSSÉE. — Nous nous bornerons au cas d'un arc symétrique (de section constante ou variable) ayant une charnière au sommet.

Soit (*fig.* 57, p. 455 *bis*) ACB l'arc considéré.

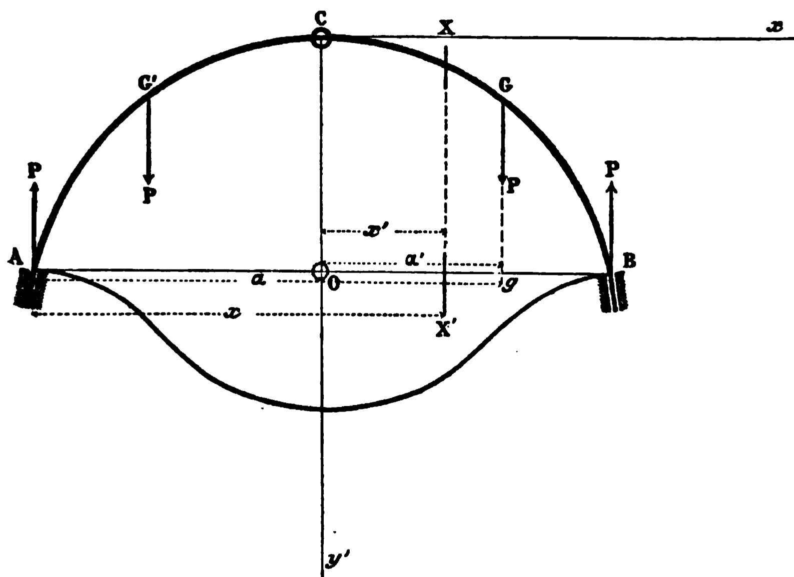
Soient Cx et Cy' les axes de coordonnées passant par le point C.

Supposons un poids $P = 1$ agissant en un point quelconque G

d'abscisse $Og = \alpha'$; nous désignerons par des lettres accentuées les abscisses comptées du milieu de la corde et par des lettres non accentuées celles comptées de l'extrémité gauche A.

Soit q la poussée que le poids P détermine. Un pareil poids placé dans la position symétrique G' produirait la même poussée et les deux réunis produiraient une poussée $2q$. Or, si M est le moment

Fig. 57.



de flexion dû à ces deux poids, M' celui qui serait produit dans la poutre correspondante AOB encastrée en A et B, articulée en O et de moment d'inertie $I' = I\frac{dx}{ds}$, on a

$$M = M' - 2qy', \tag{6}$$

en changeant dans la formule générale q en $2q$, q désignant la poussée due à une seule des deux charges agissantes.

Par symétrie, on a

$$\int \frac{M'x'}{I'}dx' = 0, \qquad \int \frac{y'x'}{I'}dx' = 0,$$

et, par suite,

$$\int \frac{M x'}{I'} dx' = 0.$$

On doit en outre avoir, d'après le théorème fondamental établi au commencement de ce Chapitre,

$$\int \frac{M y'}{I'} dx' = 0$$

ou

$$\int \frac{M' y'}{I'} dx' - 2q \int \frac{y'^2}{I'} dx' = 0,$$

où les intégrations sont à faire dans toute l'étendue AB; ou, à cause de la symétrie de O à B,

$$(7) \qquad q = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M' y'}{I'} dx'}{2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y'^2}{I'} dx'}.$$

D'ailleurs, si μ est le moment de flexion produit par les deux charges dans la poutre AB considérée comme simplement appuyée, on a

$$M' = \mu + A + B x';$$

mais, à cause de la symétrie, M' ne doit pas changer si l'on y change x' en $-x'$, d'où

$$B = 0 \qquad \text{et} \qquad M' = \mu + A.$$

D'ailleurs, pour $x' = 0$, on doit avoir $M' = 0$. Si donc on appelle μ_0 la valeur de μ répondant au milieu de la poutre, on aura

$$M' = \mu - \mu_0.$$

Mais les réactions des appuis de la poutre AB considérée comme à appuis simples et sans articulation au milieu O sont évidemment $P = 1$.

Donc, de $x' = 0$ à $x' = \alpha'$,

$$\mu = P\left(\frac{l}{2} - \alpha'\right) = \frac{l}{2} - \alpha'.$$

Par suite :

1° De $x' = 0$ à $x' = \alpha'$,

$$\mu = \mu_0 = \frac{l}{2} - \alpha' \qquad \text{et} \qquad M' = \mu - \mu_0 = 0;$$

2° De $x' = \alpha'$ à $x' = \frac{l}{2}$,

$$\mu = P\left(\frac{l}{2} - x'\right) = \frac{l}{2} - x'$$

et

$$M' = \mu - \mu_0 = \frac{l}{2} - x' - \left(\frac{l}{2} - \alpha'\right) = \alpha' - x'.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M'y'}{I'}\,dx' = \int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} \frac{M'y'}{I'}\,dx' = \int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} \frac{(\alpha' - x')y'}{I'}\,dx'$$

et, à cause de (7),

$$(8) \qquad q = \frac{\int_{\alpha}^{\frac{l}{2}} \frac{\alpha' - x'}{I} y'dx'}{2\int \frac{y'^2}{I'}\,dx'}.$$

Le dénominateur est une constante que nous savons déterminer, le numérateur qui varie seul avec α' est la somme des moments relativement au point G de forces $\frac{y'\,dx}{I'} = \frac{y'\,ds}{I}$ agissant à sa droite.

D'où l'on conclut que *la ligne de poussée* AQB *est encore une courbe funiculaire de forces* $\frac{y'\,dx}{I'} = \frac{y'\,ds}{I}$ *que l'on construirait comme il a été dit précédemment.*

§ 489.

LIGNES D'INFLUENCE. — Si l'on considère un poids unique $P = 1$, qu'on appelle M' le moment de flexion qu'il détermine en un point quelconque de la poutre AOB articulée en O et encastrée à ses extrémités, on a

$$(9) \qquad M = M' - qy'.$$

Au point $x' = 0$, on a

$$M = M' = 0.$$

Donc il n'y a pas à chercher de lignes d'influence relativement à la section C.

Pour toute autre section, on tire de l'équation ci-dessus

$$(9') \qquad \frac{M}{y'} = \frac{M'}{y'} - q,$$

de sorte que les portions d'ordonnées comprises entre la ligne de poussée et les lignes qui ont pour ordonnées $\frac{M'}{y'}$, c'est-à-dire les lignes d'influence de la poutre droite correspondant à l'arc, donnent les grandeurs $\frac{M}{y'}$, ce qui ramène le tracé des lignes d'influence de l'arc à celui des lignes d'influence de la poutre droite comme dans les Chapitres précédents.

Il est d'ailleurs aisé de tracer ces dernières lignes.

On a

$$M' = \mu + A + Bx,$$

A et B étant deux constantes à déterminer.

Pour $x' = 0$, on a $M' = 0$; donc, si $\mu = \mu_0$ est la valeur de μ au milieu de la poutre,

$$(10) \qquad M' = \mu - \mu_0 + Bx'.$$

D'ailleurs, on doit avoir

$$\int \frac{M'}{I'} x'\,dx' = 0$$

ou

$$\int \frac{\mu - \mu_0}{I'} x'\,dx' + B \int \frac{x'^2}{I'}\,dx' = 0.$$

A cause de la symétrie,

$$\int \frac{x'\,dx'}{I'} = 0;$$

donc

$$(11) \qquad B = -\frac{\int \frac{\mu}{I'} x'\,dx'}{\int \frac{x'^2}{I'}\,dx'}$$

ou, à cause de la symétrie,

$$(11') \qquad B = -\frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\mu}{I'} x'\, dx'}{2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x'^2}{I'}\, dx'}.$$

Au numérateur, posons

$$x' = x - \frac{l}{2},$$

ce qui équivaut à prendre le point A pour origine des coordonnées.

Alors on a

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\mu}{I'} x'\, dx' = \int_0^l \frac{\mu}{I'}\left(x - \frac{l}{2}\right) dx.$$

Or, si α est l'abscisse du poids mobile comptée du point A, on a

$$(11'') \qquad \begin{cases} \text{Pour } x < \alpha \dots\dots & \mu = \dfrac{l-\alpha}{l} x \\ \text{Pour } x > \alpha \dots\dots & \mu = \dfrac{\alpha}{l}(l - x) \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^l \frac{\mu}{I'}\left(x - \frac{l}{2}\right) dx = \frac{l-\alpha}{l}\int_0^\alpha \frac{x\left(x - \frac{l}{2}\right)}{I'} dx + \frac{\alpha}{l}\int_\alpha^l \frac{(l-x)\left(x - \frac{l}{2}\right)}{I'} dx$$

$$= \int_0^\alpha \frac{x\left(x - \frac{l}{2}\right)}{I'} dx + \alpha\int_\alpha^l \frac{x - \frac{l}{2}}{I'} dx - \frac{\alpha}{l}\int_0^l \frac{x\left(x - \frac{l}{2}\right)}{I'} dx.$$

Si I' est constant, on a

$$(11''') \qquad B = -12\,\frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \mu x\, dx}{l^3},$$

et le numérateur devient, en raison des dernières transformations,

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \mu x'\, dx' = \int_0^\alpha x\left(x - \frac{l}{2}\right) dx + \alpha\int_\alpha^l \left(x - \frac{l}{2}\right) dx - \frac{\alpha}{l}\int_0^l x'\left(x - \frac{l}{2}\right) dx$$

ou

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \mu x' \, dx' = -\frac{2\alpha^3 + 3l\alpha^2 - l^2\alpha}{12} = -\frac{\alpha(l-\alpha)(l-2\alpha)}{12}$$

et

$$B = \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\left(1 - \frac{2\alpha}{l}\right).$$

Comme nous appelons α' l'abscisse du poids, comptée depuis le milieu de la poutre, en sorte que

$$\alpha = \alpha' + \frac{l}{2},$$

$$(11^{\text{IV}}) \qquad B = 2\left(\frac{\alpha'^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right)\frac{\alpha'}{l}$$

et à cause de (10)

$$(12) \qquad M' = \mu - \mu_0 + 2\frac{\alpha'}{l}\left(\frac{\alpha'^2}{l^2} - 4\right)x';$$

d'où

$$(12') \qquad \frac{M'}{y'} = \frac{\mu - \mu_0}{y'} + \frac{2\alpha'}{l}\left(\frac{\alpha'^2}{l^2} - 4\right)\frac{x'}{y'}.$$

Si, pour chaque section X' d'abscisse x', on trace une courbe ayant pour coordonnées courantes α' et $\frac{M'}{y'}$, les portions d'ordonnées comprises entre ces courbes et la ligne de poussée donnent les valeurs de

$$\frac{M}{y'},$$

répondant aux diverses valeurs de α' ou aux diverses portions du mobile, ce qui, comme nous l'avons vu, permettra de discuter le passage d'un mobile ou d'un convoi sur l'arc.

Ainsi nous n'avons qu'à chercher les lignes représentées par l'équation (12').

Comme ces lignes sont symétriques pour les sections symétriques, nous pouvons ne les tracer que pour la demi-poutre de droite, celle située du côté des abscisses positives. On supposera donc $x' > 0$.

Or on a

$$(13)\quad \begin{cases} \text{Pour } x < \alpha \ldots & \mu = \left(1 - \dfrac{\alpha}{l}\right) x = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha'}{l}\right)\left(\dfrac{l}{2} + x'\right), \\ \text{Pour } x > \alpha \ldots & \mu = \dfrac{\alpha}{l}(l - x) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha'}{l}\right)\left(\dfrac{l}{2} - x'\right). \end{cases}$$

Pour $x' = 0$,

$$(14)\qquad \mu = \mu_0 = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{2} \mp \frac{\alpha'}{l}\right);$$

le signe supérieur convient pour $\alpha' > 0$ et le signe inférieur pour $\alpha' < 0$.

1° *Partons des lignes d'influence situées dans la demi-poutre de droite où* $\alpha' > 0$.

Alors

$$(15)\quad \begin{cases} \text{Pour } x' < \alpha' \ldots & \mu - \mu_0 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha'}{l}\right) x', \\ \text{Pour } x' > \alpha' \ldots & \mu - \mu_0 = \alpha' - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha'}{l}\right) x'. \end{cases}$$

Or on a

$$M' = \mu - \mu_0 + Bx$$

ou

$$M' = \mu - \mu_0 + 2\left(\frac{\alpha^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right)\frac{\alpha x}{l}.$$

Par suite, pour $\alpha' < x'$, l'équation (12') donne

$$\frac{M'}{y'} = \frac{\alpha'}{y'} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{l}\right)\frac{x'}{y'} + 2\left(\frac{\alpha'^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right)\frac{\alpha'}{l}\frac{x'}{y'}$$

ou

$$(16)\qquad \frac{M'}{y'} = \frac{\alpha'}{y'} - \frac{x'}{y'}\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{l}\right)\left[1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha'}{l}\right)\right].$$

Cette équation, où α' et $\dfrac{M}{y'}$ seraient les coordonnées courantes et $x' > 0$ un paramètre définissant une section quelconque placée dans la demi-poutre de droite, représente la portion de la ligne d'influence relative à cette section comprise entre la section elle-même et le milieu de la poutre.

Pour $\alpha' > x'$, les équations (15) et (12') donnent

$$(16')\qquad \frac{M'}{y'} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha'}{l}\right)\frac{x'}{y'}\left[1 - \frac{2\alpha'}{l}\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{l}\right)\right].$$

C'est l'équation de la portion de ligne d'influence située à droite de la section.

La branche de gauche de chaque ligne d'influence n'est connue par l'équation (16) qu'entre la section de la poutre que l'on considère et le milieu de la poutre. Il faut trouver l'équation de la portion de cette branche répondant à la demi-poutre de gauche, c'est-à-dire répondant aux valeurs négatives de α'.

Et comme $x' > 0$, on aura nécessairement ici $\alpha' < x'$. Donc l'équation (13) donne

$$\mu = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{l}\right)\left(\frac{l}{2} - x'\right);$$

pour $x' = 0$,

$$\mu_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{l}\right)\frac{l}{2},$$

d'où

$$\mu - \mu_0 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{l}\right)x'$$

et

$$M' = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{l}\right)x' + 2\left(\frac{\alpha'^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right)\frac{\alpha' x'}{l}$$

et

$$(16'') \qquad \frac{M'}{y'} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{l}\right)\frac{x'}{y'}\left[1 + 2\frac{\alpha}{l}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{l}\right)\right].$$

En résumé, pour toute section X' située dans la demi-portion de droite de la poutre :

1° La portion de ligne d'influence située dans la demi-portion de gauche de la poutre est représentée par la dernière équation;
2° Celle comprise entre le milieu de la poutre et la section est représentée par l'équation (16);
3° Celle placée à la droite de la section, par l'équation (16').

Observons que les équations (16') et (16'') ne diffèrent que par le changement de α' et M respectivement en $-\alpha'$ et $-$M.

§ 490.

LIGNES D'INFLUENCE DES EFFORTS TRANCHANTS. — De l'équation

$$M = M' - qy',$$

on tire

$$(17) \qquad \frac{dM}{ds} = \frac{dM'}{dx}\frac{dx}{ds} - q\frac{dy'}{ds}$$

ou

$$(17') \qquad \frac{\frac{dM}{ds}}{\frac{dy'}{ds}} = \frac{dM'}{dx}\frac{dx}{dy'} - q,$$

et, par cette équation, on ramène le problème des lignes d'influence des efforts tranchants de l'arc à celui des lignes d'influence analogues de la poutre correspondante, comme nous l'avons fait précédemment.

§ 491.

ÉQUATIONS COMPLÈTES EN AYANT ÉGARD A LA TEMPÉRATURE, A LA COMPRESSION DE LA FIBRE MOYENNE ET A L'EFFORT TRANCHANT. — En reprenant les raisonnements et notations du § 483, mais appliquant les formules complètes (A_1) du § 423 en ayant égard à l'erratum placé à la suite de la Table des matières, on trouve, au lieu des équations fondamentales, celles-ci :

$$o = \delta\tau l - \int \frac{M}{EI}(\eta - y)\,ds - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\int \frac{T}{ES}\frac{dy}{ds}ds - \int \frac{1}{ES}X\,ds,$$
$$o = \delta\tau h + \int \frac{M}{EI}(\xi - x)\,ds + \left(1 + \frac{1}{g}\right)\int \frac{T}{ES}\frac{dx}{ds}ds - \int \frac{1}{ES}Y\,ds,$$

où $l = x_1 - x_0$, $h = y_1 - y_0$ représentent les différences des coordonnées des deux extrémités de l'arc et où les intégrations sont à faire dans toute l'étendue de l'arc ; ces formules sont vraies, quels que soient les axes de coordonnées employés.

Elles permettent de trouver analytiquement le moment de flexion dans un arc comme celui proposé, quelles qu'en soient les charges. En effet, quelles que soient les charges, verticales ou non, le moment de flexion en un point quelconque G de l'arc a pour expression

$$(18) \qquad M = m' - R(\xi - x) - q(\eta - y),$$

m' étant la somme des moments relativement à G de toutes les charges données comprises entre ce point et la charnière ; R et q sont d'autre part les composantes parallèles aux axes de la réaction exercée sur la charnière par la partie de l'arc ne comprenant

pas le point G sur celle qui le comprend. En portant cette expression dans les deux équations ci-dessus, on obtient les valeurs des deux constantes R et q par la résolution de deux équations du premier degré.

Supposons qu'on néglige les termes de l'ordre de l'effort tranchant, c'est-à-dire ceux qui sont multipliés par $1+\frac{1}{g}$; admettons, de plus, qu'il s'agisse d'un arc de structure symétrique ayant une charnière en son sommet C.

Prenons (*fig.* 57, p. 159) pour axe de coordonnées les axes Cx et Cy'. Alors, dans les équations ci-dessus, $h=0$, $\xi=\eta_1=0$, $y=y'$ et, en négligeant les termes spécifiés, et appelant, comme ci-dessus, x', au lieu de x, les abscisses comptées du milieu de la corde (x étant réservé aux abscisses comptées de l'extrémité gauche A), il vient

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= E\delta\tau l + \int \frac{M}{I} y'\,ds - \int \frac{1}{S}\,X\,ds, \\ 0 &= \int \frac{M}{I}\,x'ds + \int \frac{1}{S}\,Y\,ds. \end{aligned}\right.$$

Supposons les charges verticales; on peut alors poser, comme précédemment,

$$(20)\qquad M = M' - qy'$$

ou

$$(21)\qquad M' = \mu - \mu_0 - Bx',$$

B étant une constante indéterminée, de sorte que M′ ne dépend que de x' et non de y'; de plus, M′ est proportionnel aux ordonnées du polygone funiculaire des charges données, comptées depuis une droite de fermeture convenable, soit

$$(21')\qquad M' = q_0 z'_0$$

et

$$(22)\qquad M = q_0 z'_0 - qy'.$$

D'ailleurs $X=q$ et (§ 423)

$$Y = \frac{\partial M}{\partial x'} = \frac{\partial M'}{\partial x'}.$$

Portons cette expression de M dans les équations (19), il viendra

$$(23)\quad \begin{cases} o = E\delta\tau l + \int \frac{M'}{I} y'\, ds - q\left(\int \frac{ds}{S} + \int \frac{y'^2}{I}\, ds\right), \\ o = \int \frac{M'}{I} x'\, ds - q \int \frac{y'x'}{I}\, ds + \int \frac{1}{S} \frac{\partial M'}{\partial x'} ds. \end{cases}$$

Mais, à cause de la symétrie,

$$\int \frac{y'x'}{I}\, ds = o.$$

Donc, la dernière se réduit à

$$(24)\quad o = \int \frac{M'}{I} x'\, ds + \int \frac{1}{S} \frac{\partial M'}{\partial x'}\, ds.$$

a. **Influence de la température.** — Si, au contraire, on fait abstraction de la compression de la fibre moyenne, le second terme de cette équation est à supprimer.

Elle se réduit à

$$(25)\quad \int \frac{M'}{I} x\, ds = o \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{z'_0}{I'} x\, dx = o.$$

Donc la ligne de fermeture $a_0 b_0$ du polygone funiculaire se déterminera comme au § 473, lorsqu'on a fait abstraction de la température. La première des équations (23) donne alors pour la poussée

$$(26)\quad q = \frac{q_0 \int \frac{z'_0}{I} y'\, ds}{\int \frac{y'^2}{I}\, ds} + \frac{E\delta\tau l}{\int \frac{y'^2}{I}\, ds}.$$

Le premier terme est celui précédemment construit; le second relatif à la température se trouve sans difficulté, son dénominateur ayant été construit lors de la recherche du premier terme.

b. **Influences réunies de la température et de la compression de la fibre moyenne.** — Si l'on prend les formules complètes (23), on a, en remplaçant M' par son expression analytique (18) et observant que $\int \frac{x'y'}{I}\, ds = o$ et aussi $\int \frac{x'\, ds}{I} = o$, à cause de

la symétrie de l'arc,

$$(27)\qquad \int \frac{\mu}{I} x'\,ds + B\left(\int \frac{x'^2}{I}\,ds + \int \frac{ds}{S}\right) + \int \frac{1}{S}\,\frac{d\mu}{dx'}\,ds = 0,$$

d'où

$$(28)\qquad B = -\frac{\int \frac{\mu}{I} x'\,ds + \int \frac{1}{S}\,\frac{d\mu}{dx'}\,ds}{\int \frac{x'^2}{I}\,ds + \int \frac{ds}{S}}.$$

Si l'on regarde $I' = I\,\frac{dx'}{ds}$ et $S' = S\,\frac{dx'}{ds}$ comme constants, la seconde intégrale du numérateur s'effectue et est nulle, parce que $\mu = 0$ aux deux limites de l'intégration, c'est-à-dire aux extrémités de l'arc. Par suite

$$(28')\qquad B = -\frac{\int \mu x'\,dx'}{\frac{l^3}{12} + \frac{I\,l}{S}},$$

formule très simple et où le numérateur se construit sans difficulté; car, si z_0 représente l'ordonnée d'un polygone funiculaire des charges données comptées depuis sa corde,

$$\mu = q_0 z_0,$$
$$\int \mu x'\,dx' = q_0 \int z_0 x'\,dx',$$

où l'intégrale est la somme des moments des forces verticales $z_0\,dx'$ par rapport à la charnière. Elle s'obtient donc par le tracé d'un second polygone funiculaire.

La première des équations (23), où M' est à présent connu, donne

$$(24)\qquad q = \frac{\int \frac{M'}{I} y'\,ds + E\,\delta\tau\,l}{\int \frac{ds}{S} + \int \frac{y'^2}{I}\,ds},$$

et, si I' et S' sont constants,

$$(29')\qquad q = \frac{\int M' y'\,dx' + EI'\,\delta\tau\,l}{\frac{I}{S}\,l + \int y'^2\,dx'}.$$

Le coefficient B étant déterminé, on a la ligne de fermeture $a_0 b_0$

telle que

$$M' = q_0 z'_0;$$

car

$$M' = \mu - \mu_0 + Bx',$$

$$M' = q_0\left(z_0 - \frac{\mu_0}{q_0} + \frac{B}{q_0} x\right).$$

Cette ligne a donc pour ordonnée

$$\frac{\mu_0}{q_0} - \frac{B}{q_0} x';$$

par suite, l'équation (24) devient

$$(30) \qquad q = \frac{q_0 \int \frac{z'_0}{I'} y' \, dx' + E\delta\tau l}{\int \frac{dx'}{S'} + \int \frac{y'^2}{I'} dx}.$$

Les intégrales sont les mêmes que si l'on négligeait la compression de la fibre moyenne, sauf la quadrature $\int \frac{dx'}{S'}$ qui n'offre aucune difficulté.

Si I' et S' sont constants,

$$(31) \qquad q = \frac{q_0 \int z'_0 y' \, dx' + EI'\delta\tau l}{\frac{I}{S} l + \int y'^2 \, dx'},$$

et l'on n'a pas à faire d'autres quadratures que celles que nous avons faites en négligeant la compression de la fibre moyenne.

B. ARC ENCASTRÉ A SES DEUX EXTRÉMITÉS AVEC DEUX CHARNIÈRES.

§ 492.

FORMULE FONDAMENTALE COMPLÈTE. — Nous allons de suite donner la formule fondamentale se rapportant à ce cas, en ayant égard à la fois à la température, à la compression de la fibre moyenne et à l'effort tranchant.

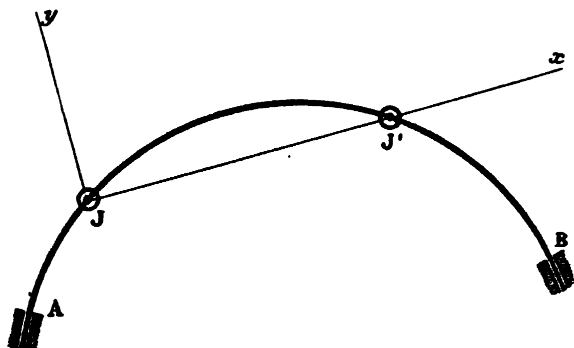
Soit (*fig.* 58, p. 172) AB l'arc encastré en ses extrémités et portant deux charnières en deux quelconques de ses points J et J'.

Prenons la droite JJ' pour axe des x et une perpendiculaire Jy pour axe des y. Appelons σ, σ' les longueurs des arcs, AJ, AJ' et s la longueur totale de l'arc AB.

Nous comptons les arcs s depuis le point A. Nous désignons par x_0, y_0; x_1, y_1 les coordonnées des deux extrémités A et B de la fibre moyenne, et nous appelons λ la longueur de la corde JJ′.

Considérons d'abord le point J comme faisant partie de l'arc AJ. La composante u du déplacement élastique de ce point parallèlement à JJ′, donnée par les formules (A_1) et (d) du § 423 en y faisant $u_0 = v_0 = \Omega_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = \sigma$, $x = 0$, $y = 0$, supprimant

Fig. 58.



les accents sous les signes d'intégration, ayant égard à l'erratum indiqué à la fin de la Table des matières, et supposant les coefficients d'élasticité constants, est

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} u = &-\delta\tau x_0 + \frac{1}{E}\int_0^\sigma \frac{M}{I} y\, ds \\ &-\left(1+\frac{1}{g}\right)\int_0^\sigma \frac{\frac{dy}{ds}}{S}\frac{dM}{ds}\, ds + \frac{1}{E}\int_0^\sigma \frac{1}{S}\frac{\partial M}{\partial y}\, ds. \end{aligned}\right.$$

Considérons, à présent, la portion JJ′ de l'arc.

La composante u' du déplacement du point J′ est donnée d'après les mêmes formules du § 423 en y remplaçant u_0 par u et faisant $x_0 = y_0 = 0$, $x = \lambda$, $y = 0$,

$$(a')\quad \left\{\begin{aligned} u' = &\, u + \delta\tau\lambda + \frac{1}{E}\int_\sigma^{\sigma'} \frac{M}{I} y\, ds \\ &-\left(1+\frac{1}{g}\right)\int_\sigma^{\sigma'} \frac{\frac{dy}{ds}}{S}\frac{dM}{ds}\, ds + \frac{1}{E}\int_\sigma^{\sigma'} \frac{1}{S}\frac{\partial M}{\partial y}\, ds. \end{aligned}\right.$$

Considérons enfin la portion J′B de l'arc et exprimons que, pour $x = x_1$, $y = y_1$ on a $\Omega = 0$, $u = 0$.

En appelant Ω' la rotation de la section J′, on aura, puisque $\Omega = 0$, en B,

$$0 = \Omega' - \frac{1}{E}\int_{\sigma'}^{s} \frac{M}{I}\,ds,$$

puis

$$0 = u' + \Omega' y_1 + \delta\tau(x_1 - \lambda) - \frac{1}{E}\int_{\sigma'}^{s} \frac{M}{I}(y_1 - y)\,ds$$
$$-\left(1 + \frac{1}{g}\right)\int_{\sigma'}^{s} \frac{\frac{dy}{ds}}{S}\frac{dM}{ds}\,ds + \frac{1}{E}\int_{\sigma'}^{s} \frac{1}{S}\frac{\partial M}{\partial y}\,ds.$$

A cause de la première, la seconde se réduit à

$$(a'')\quad \begin{cases} 0 = u' + \delta\tau(x_1 - \lambda) + \dfrac{1}{E}\displaystyle\int_{\sigma'}^{\sigma} \frac{My}{I}\,ds \\[2ex] \quad -\left(1 + \dfrac{1}{g}\right)\displaystyle\int_{\sigma'}^{s} \frac{\frac{dy}{ds}}{S}\frac{dM}{ds}\,ds + \frac{1}{E}\int_{\sigma'}^{s} \frac{1}{S}\frac{\partial M}{\partial y}\,ds. \end{cases}$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (a), (a'), (a''), on aura

$$(32)\quad \begin{cases} 0 = \delta\tau(x_1 - x_0) + \dfrac{1}{E}\displaystyle\int \frac{M}{I}y\,ds \\[2ex] \quad -\left(1 + \dfrac{1}{g}\right)\displaystyle\int \frac{\frac{dv}{ds}}{S}\frac{dM}{ds}\,ds + \frac{1}{E}\int \frac{1}{S}\frac{\partial M}{\partial y}\,ds, \end{cases}$$

équation fondamentale qui permet de résoudre tous les problèmes relatifs à un arc à deux charnières, quelles que soient les charges verticales ou non qu'il supporte.

§ 493.

USAGE DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE. — Soit m la somme des moments relativement à un point quelconque de l'arc, des forces directement appliquées et données qui agissent à gauche de ce point, en sorte que m est une fonction connue des coordonnées du point considéré. On aura

$$M = m + M_0 + Rx - qy,$$

M_0, R, q étant trois constantes à déterminer, à savoir : M_0 le moment d'encastrement en A; R et q les composantes de la réaction en ce point.

Aux points J et J', soit pour $x = y = 0$ et pour $x = \lambda$, $y = 0$, on doit avoir $M = 0$.

Soient m_0 et m'_0 les valeurs de m en ces deux points, on aura

$$0 = m_0 + M_0,$$
$$0 = m'_0 + M_0 + R\lambda,$$

de sorte que les coefficients M_0 et R sont directement déterminés, et l'on a

$$M = M' - qy, \tag{33}$$

en posant, pour abréger,

$$M' = m - m_0 + \frac{m_0 - m'_0}{\lambda} x, \tag{34}$$

M' étant ainsi une fonction connue par les *seules conditions statiques* du problème. La poussée q de l'arc est seule inconnue. En portant l'expression de M dans l'équation fondamentale, on trouve q par la résolution d'une équation du premier degré.

§ 494.

THÉORÈME FONDAMENTAL (abstraction faite de la température de la compression de la fibre moyenne et de l'effort tranchant).

Si, aux divers éléments ds d'un arc encastré en ses deux extrémités et portant deux charnières, quelles que soient les charges qui le sollicitent, on applique des forces $\frac{M\,ds}{EI}$ *parallèles à la droite qui joint les deux charnières, la résultante de ces forces coïncide avec cette droite.*

En effet, en négligeant dans la formule (32) les termes autres que celui relatif à la flexion, on trouve

$$\int \frac{M}{EI} y\,ds = 0, \tag{35}$$

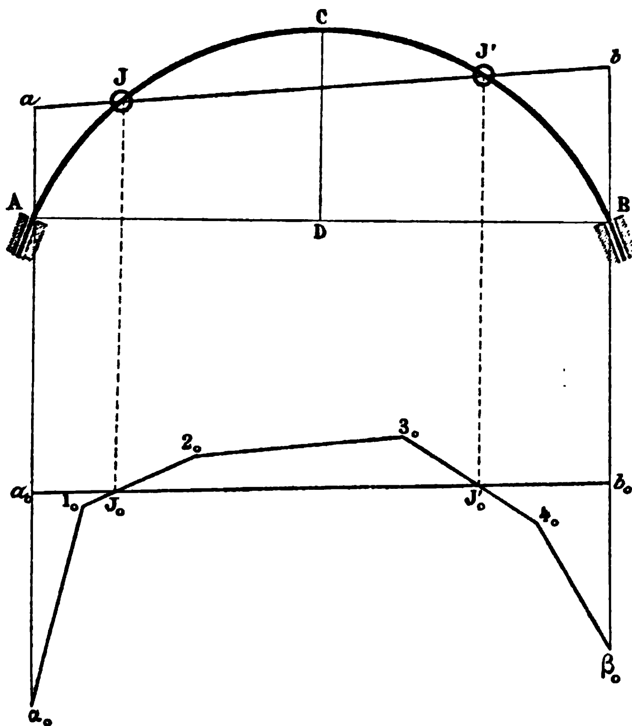
qui exprime la proposition énoncée et qui s'appliquerait même si E était variable.

Si E est constant, le théorème s'applique aux forces $\frac{M}{I}ds$; si I est constant, il s'applique aux forces $M\,ds$, et si $I' = I\frac{dx}{ds}$ est constant, il s'applique aux forces $M\,dx$.

§ 495.

RECHERCHE GRAPHIQUE DE LA POUSSÉE ET DU POLYGONE DES PRESSIONS. — Soit (*fig.* 59) AJJ′B l'arc considéré, que nous supposons soumis à des charges verticales quelconques.

Fig. 59.



Construisons un polygone funiculaire quelconque $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 \beta_0$ de ces charges.

Soient J_0, J'_0 les points où les verticales des charnières coupent le polygone; la droite $a_0 b_0$ qui joint ces deux points est la droite

de fermeture de ce polygone, de même que celle *ab* qui joint les charnières est celle de l'arc.

Soient respectivement z'_0 et y' les ordonnées positives ou négatives du polygone funiculaire et de l'arc comptées depuis leurs lignes de fermeture respectives. Si q_0 est la distance polaire arbitrairement choisie du polygone $\alpha_0 \beta_0$, on aura

$$M = q_0 z'_0 - q y'.$$

Or, on doit avoir

$$\int \frac{M y'}{I} ds = 0$$

Soit

$$q_0 \int \frac{z'_0}{I} y' \, ds - q \int \frac{y'^2}{I} ds = 0,$$

d'où

$$q = q_0 \frac{\int \frac{z'_0}{I} y' \, ds}{\int \frac{y'^2}{I} ds},$$

que l'on construira comme dans le problème relatif à l'arc à deux charnières fixes, en observant seulement que les forces $\frac{z'_1}{I}$ et $\frac{y'}{I}$ sont ici, les unes d'un sens, les autres de sens opposé, suivant que les z'_0 et y' sont positives ou négatives.

En divisant l'arc en parties égales Δs, on aura

$$q = q_0 \frac{\sum \frac{z'_0}{I} y'}{\sum \frac{y'^2}{I}},$$

les sommes Σ étant étendues à l'arc entier.

Si l'arc est de structure symétrique et les charnières symétriquement placées par rapport au sommet de l'arc, on aura

$$q = q_0 \frac{\sum \frac{z'_0 + z''_0}{2} y'}{\sum \frac{y'^2}{I}},$$

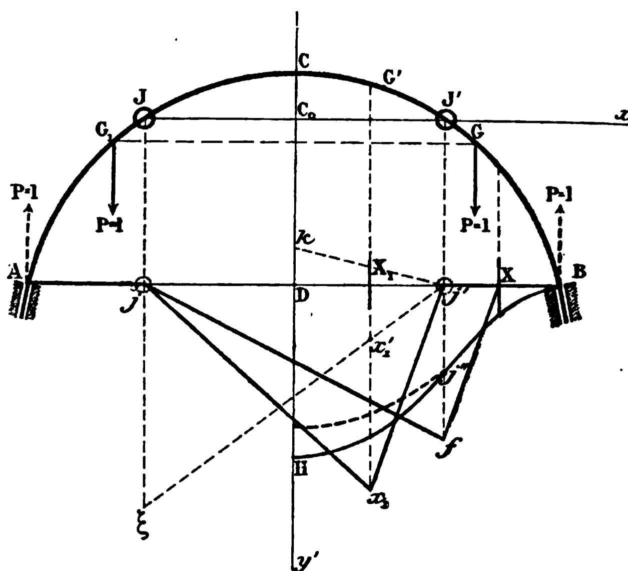
les sommes s'étendant seulement à une moitié de l'arc et z'_0, z_0 étant les ordonnées répondant à deux points de division symétriquement placés par rapport au sommet.

On peut, pour plus de commodité, amplifier toutes les ordonnées y' dans un même rapport sans que la poussée en soit modifiée, comme on a amplifié les y dans la recherche analogue relative à l'arc posé sur tourillons fixes.

§ 496.

LIGNE DE POUSSÉE. — Bornons-nous, pour simplifier les écritures, au cas usuel d'un arc de structure symétrique ayant deux charnières symétriquement placées par rapport au sommet C de l'arc (*fig.* 60).

Fig. 60.



Prenons la ligne des charnières pour axe des x et la verticale du sommet pour axe des y'.

Si q est la poussée produite par une charge $P = 1$, $2q$ sera la poussée produite par cette charge et sa symétrique, et l'on aura

$$(36) \qquad M' = \mu - \mu_0,$$

μ étant le moment de flexion que ces deux charges produiraient

sur la poutre à appuis simples AB et μ_0 la valeur de μ pour

$$x = \pm x_0,$$

x_0 désignant l'abscisse de la charnière J' située du côté des x positifs.

Par suite

$$M = \mu - \mu_0 - 2qy'. \tag{37}$$

On doit avoir

$$\int \frac{My'}{I} ds = 0, \tag{38}$$

et, comme tout est symétrique (charge et arc), il suffit de faire l'intégration sur la moitié CB de l'arc.

D'où

$$\int (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I} ds = 2q \int \frac{y'^2}{I} ds,$$

$$q = \frac{\int (\mu - \mu_0) \frac{y'^2}{I} ds}{2 \int \frac{y'^2}{I} ds}, \tag{39}$$

les intégrations étant faites de C en B.

On a, si α' est l'abscisse de la charge P = 1 qui agit en G :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1^\circ \text{ Pour } x < \alpha' \ldots\ldots\ldots\ldots & \mu = \frac{l}{2} - \alpha', \\ 1^\circ \text{ Pour } x > \alpha' \ldots\ldots\ldots\ldots & \mu = \frac{l}{2} - x. \end{array} \right. \tag{40}$$

Ceci posé, la ligne de poussée cherchée est évidemment symétrique et il suffit de la tracer pour le demi-arc CB.

Mais elle comporte ici deux branches distinctes, l'une entre la naissance B de l'arc et la charnière J', l'autre entre la charnière et le sommet de l'arc.

a. **Portion de la ligne de poussée comprise entre la naissance B et la charnière J'.** — Supposons le point G où agit le poids compris entre J' et B, soit $x_0 < \alpha'$. Alors μ_0 est donné par la première des équations (40)

$$\mu_0 = \frac{l}{2} - \alpha'.$$

Donc :

1° Pour $x < \alpha'$ .... $\mu - \mu_0 = 0$

2° Pour $x > \alpha'$ .... $\mu - \mu_0 = \alpha' - x$

et

$$\int (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I} ds = \int_0^{\frac{l}{2}} (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I'} dx$$

$$= \int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I} dx = \int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} (\alpha' - x) \frac{y'}{I'} dx;$$

d'où, pour cette branche de courbe,

$$(41) \qquad q = \frac{\int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} (\alpha' - x) \frac{y'}{I'} dx}{2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y'^2}{I'} dx}.$$

Si l'on construit une courbe funiculaire des charges $\frac{y'}{I'} dx$ tangente en B à la ligne BA et d'une distance polaire évaluée comme dans tous les problèmes précédents, on aura la branche de courbe dont il s'agit.

b. **Portion de la ligne de poussée comprise entre la charnière et le sommet de l'arc.** — Supposons le poids $P = 1$ en G' entre J' et C, en sorte que $x_0 > \alpha'$. Alors μ_0 est donné par la seconde des équations (40) et l'on a

$$\mu_0 = \frac{l}{2} - x_0.$$

Donc :

1° Pour $x < \alpha'$, $\quad \mu - \mu_0 = x_0 - \alpha'$,

2° Pour $x > \alpha'$, $\quad \mu - \mu_0 = x_0 - x$.

Par suite,

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I'} dx = \int_0^{\alpha'} (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I'} dx + \int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I'} dx$$

$$= \int_0^{\alpha'} (x_0 - \alpha') \frac{y'}{I} dx + \int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} (x_0 - x) \frac{y'}{I} dx$$

ou

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (\mu - \mu_0) \frac{y'}{I'} dx = (x_0 - \alpha') \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y'}{I} dx + \int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} (\alpha' - x) \frac{y'}{I} dx.$$

Donc

$$(41\ bis) \qquad q = \frac{\int_{\alpha'}^{\frac{l}{2}} (\alpha' - x) \frac{y'}{I} dx}{2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y'^2}{I} dx} - \frac{\frac{1}{2}(\alpha' - x_0)}{\frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y^2}{I} dx}{\int^{\frac{l}{2}} \frac{y'}{I} dx}}.$$

C'est l'équation de la nouvelle branche de courbe.

Pour $\alpha' = x_0$, les deux branches ont la même ordonnée, comme cela doit être.

Le premier terme est le même que le second membre de l'équation (41).

Le second est l'ordonnée d'une droite passant par le point j' projection de J'.

Posons

$$q_1 = \frac{\frac{1}{2}(\alpha' - x)}{\frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y'^2}{I'} dx}{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y'}{I'} dx}}.$$

Le dénominateur est l'ordonnée du centre des forces horizontales $\frac{y'}{I'} dx = \frac{y'}{I} ds$ appliquées à l'arc, qu'on connaît par la construction du polygone funiculaire qui sert à déterminer

$$\int \frac{y'^2}{I'} dx.$$

Soit η_0 cette ordonnée; on aura

$$q_1 = \frac{1}{2\eta_0}(\alpha' - x_0).$$

Concevons que l'on construise cette droite, représentons-la par $j'k$. Construisons, d'autre part, la courbe funiculaire représentée par l'équation (41) non seulement dans la partie j''B où elle est valable, mais jusqu'à sa rencontre avec la verticale du sommet. Entre j' et D les ordonnées de cette courbe comptées depuis la droite fournissent la poussée.

Si l'on porte ces ordonnées à partir de BD, on aura la courbe j''H, et la ligne de poussée sera formée par les deux courbes Bj'' et j''H.

Elle est symétrique dans la moitié de gauche de l'arc.

§ 497.

LIGNES D'INFLUENCE. — Comme précédemment, à l'aide de la formule

$$M = M' - qy',$$

on ramène le problème des lignes d'influence de l'arc à celui des lignes d'influence d'une poutre AB encastrée à ses extrémités et articulée en j et j'.

Mais ces dernières lignes sont ici des droites que l'on détermine par les seules règles de la Statique.

En effet, dans la poutre AB encastrée en ses extrémités et articulée en j et j' :

1° Si un mobile parcourt la partie Bj', il est évident qu'il ne produit un moment de flexion que sur les sections situées à sa droite et non sur celles de gauche, comme si la poutre Bj' existait seule encastrée en B et libre en j';

2° De même, si un mobile parcourt Aj, il ne produit pas de moment de flexion sur les sections situées à sa droite;

3° Si un mobile parcourt la partie intermédiaire jj', il est clair qu'il produit en j et j' les mêmes réactions que si ces points étaient fixes.

Ceci posé, considérons une section X située entre B et j'; on doit supposer un mobile parcourant la poutre et à partir de chacune de ses positions porter une ordonnée proportionnelle au moment de flexion M' qu'il détermine dans la section X ou plutôt égale au quotient $\frac{M'}{y'}$, y' étant l'ordonnée que la verticale X déter-

mine entre l'arc et l'axe des x, ce quotient étant construit à la même échelle que les ordonnées de la ligne de poussée.

Or, quand le mobile parcourt la portion BX, en vertu de la remarque 1°, il ne produit pas de moment de flexion en X; cette portion de la ligne d'influence coïncide donc avec l'axe des abscisses BX.

Quand le mobile de poids $P = 1$ est arrivé en j', il produit dans la section X un moment de flexion

$$P \times j'X = j'X.$$

Donc en j' on doit porter en ordonnée le quotient $\frac{j'X}{y'}$ à l'échelle ci-dessus indiquée. Soit f le point obtenu. Entre j' et X, la ligne d'influence est la droite fX.

Quand le mobile parcourt Aj, en vertu de la remarque 2°, il ne produit pas de flexion en X; donc il n'en produit pas quand il est en j; par suite, la portion de ligne d'influence entre j' et j est la droite fj et entre j et A c'est l'axe des abscisses.

La ligne complète est

$$BXfjA.$$

Supposons une section X_1 comprise entre j et j'.

Pendant que le mobile est entre j et j', en vertu de la remarque 3°, la ligne d'influence est la même que si la poutre jj' était à appuis simples.

Prenons donc (§ 303) $j\xi = jX_1$; joignons $j'\xi$ qui coupe la verticale X_1 en x'_1. Le moment de flexion produit en X_1 quand le mobile passe en ce point est représenté par $X_1x'_1$; c'est donc le quotient $\frac{X_1x'_1}{y'}$, où y' est l'ordonnée de l'arc répondant à la verticale X_1 qu'il faut porter. Soit X_1x_1 cette ordonnée, la portion de ligne d'influence comprise entre j et j' est jx_1j'.

D'ailleurs, en vertu des remarques 1° et 2°, les deux autres portions coïncident avec l'axe des abscisses, en sorte que la ligne complète est

$$Bj'x_1jA.$$

On trouverait aussi facilement les lignes d'influence d'efforts tranchants auxquelles on ramène les lignes analogues concernant l'arc.

C. ARC ENCASTRÉ A UN BOUT, POSÉ SUR TOURILLON FIXE A L'AUTRE ET PORTANT UNE CHARNIÈRE.

§ 498.

Si, dans les formules et théorèmes généraux relatifs à l'arc encastré aux deux bouts avec deux charnières, on suppose l'une des charnières infiniment voisine de l'une des extrémités de l'arc, on a l'arc encastré à un bout, posé sur tourillon à l'autre avec une charnière.

Les problèmes relatifs à cet arc ne forment donc qu'un cas particulier de ceux résolus dans la partie B de ce Chapitre.

DEUXIÈME SECTION.

ACTIONS EXERCÉES PAR DES FORCES NORMALES AU PLAN DE LA FIBRE MOYENNE, PARTICULIÈREMENT PAR LE VENT SUR LES OUVRAGES FORMÉS DE FERMES EN CHARPENTE.

CHAPITRE V.

ACTIONS EXERCÉES PAR DES FORCES NORMALES AU PLAN DE LA FIBRE MOYENNE.

§ 499.

TORSION ET FLEXION EN GÉNÉRAL. — Considérons (*fig. a*, p. 186) une pièce à fibre moyenne plane ou gauche AB et deux sections normales faites en deux points infiniment voisins G et G′ définis par les arcs $AG = s$ et $AG' = s + ds$, comptés depuis une origine fixe A.

Nous supposons toujours la courbure de la pièce assez faible pour que toutes les portions de fibre comprises entre les deux sections puissent être considérées comme sensiblement égales entre elles et à ds.

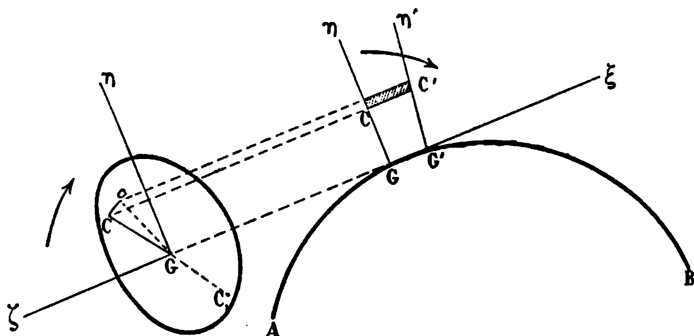
Soient $G\xi$, $G\eta$ et $G\zeta$ trois axes rectangulaires menés par le point G, l'un $G\xi$ tangent à la fibre moyenne, les deux autres quelconques; mais nous verrons que le plus commode est de les choisir coïncidant avec les axes principaux d'inertie de la section de la pièce en G. L'axe $G\zeta$ est supposé perpendiculaire au plan de la figure. La section $\eta G\zeta$ est rabattue sur le plan de la figure autour de la normale $G\eta$ et son rabattement transporté parallèlement à lui-même (*fig. a′*).

Tout déplacement infiniment petit de la section G′ relativement à la section G regardée comme fixe peut être remplacé par trois

translations parallèles aux axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ et trois rotations autour de ces mêmes axes.

La rotation autour de la tangente $G\xi$ se nomme une *torsion;* l'angle de cette rotation mesure la grandeur de la torsion et se nomme l'*angle de la torsion.*

Fig. *a'*. Fig. *a*.



La rotation autour d'une normale quelconque $G\eta$ à la fibre moyenne se nomme une *flexion;* l'angle de cette rotation se nomme l'*angle de la flexion* et l'axe $G\eta$ de la rotation se nomme de même l'*axe de la flexion.*

§ 500.

RELATIONS ENTRE LES FORCES EXTÉRIEURES ET LES FORCES ÉLASTIQUES. — La partie AG de la pièce doit être en équilibre sous l'influence des forces extérieures y compris les réactions des appuis, s'il y en a, qui la sollicitent et des forces élastiques exercées dans la section normale $\eta G \zeta$ par la partie de la pièce située à la droite de cette section sur celle située à sa gauche.

Donc, les forces élastiques exercées au contraire, par la partie de gauche sur celle de droite, forces que nous conviendrons de considérer, et les forces extérieures agissant sur la partie AG, sont deux *systèmes équivalents,* c'est-à-dire ayant mêmes sommes de projections sur un axe quelconque et mêmes sommes de moments relativement à un axe quelconque.

En particulier, cela a lieu pour les trois axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$.

Nous désignerons respectivement par

$$N,\quad T_\eta,\quad T_\zeta$$

et par

$$M_\xi,\quad M_\eta,\quad M_\zeta$$

les sommes des projections sur les trois axes dont il s'agit et les sommes des moments, relativement à ces axes, des forces extérieures agissant entre la section G et l'extrémité gauche de la pièce.

Nous allons chercher les six sommes analogues pour les forces élastiques que la partie AG du corps exerce sur la partie GB et les égaler aux précédentes.

§ 501.

DÉPLACEMENTS RELATIFS D'UNE SECTION PAR RAPPORT A UNE SECTION INFINIMENT VOISINE DUS A DES FORCES DONNÉES QUELCONQUES. — Soient

$$\lambda_\xi,\quad \lambda_\eta,\quad \lambda_\zeta$$

les trois translations de la section G′ parallèlement aux trois axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ qui se produisent (§ 499) dans le mouvement de cette section relativement à celle G considérée comme fixe.

La première développe en chaque point C′ ou plutôt dans une fibre CC′ (*fig. a*) de longueur ds et de section σ une force élastique proportionnelle à l'allongement $\frac{\lambda_\xi}{ds}$ par unité de longueur et à la section σ; soit

$$E\sigma\frac{\lambda_\xi}{ds},$$

E étant le coefficient d'élasticité longitudinale de la matière.

Supposons, pour fixer les idées, que λ_ξ soit positif, c'est-à-dire que la fibre considérée s'allonge; la force à appliquer en C′ sera dirigée dans le sens $G\xi$ ou positive : c'est celle qu'exercerait la partie de droite du corps sur la partie de gauche; celle que nous considérons étant de sens contraire sera

$$(1)\qquad -E\sigma\frac{\lambda_\xi}{ds}.$$

Toutes les forces analogues exercées ainsi sur les divers éléments σ de la section $\eta G \zeta$ étant parallèles à l'axe $G\xi$, leur résultante est égale à leur somme, soit à

$$(a) \qquad -E\frac{\lambda_\xi}{ds}\sum\sigma = -ES\frac{\lambda_\xi}{ds},$$

S étant l'aire de la section transversale. De plus, la force appliquée à chaque élément σ étant proportionnelle à cet élément, leur résultante passe par le centre de gravité G de la section. Donc elle est dirigée suivant $G\xi$, et son moment relativement à chacun des axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ et par suite aussi la somme des moments des forces (1) par rapport à ces axes sont nuls.

On verrait de même que les translations λ_η, λ_ζ font naître des forces élastiques respectivement parallèles aux axes $G\eta$, $G\zeta$ et égales à

$$-G\sigma\frac{\lambda_\eta}{ds}, \quad G\sigma\frac{\lambda_\xi}{ds},$$

$G = gE$ étant le coefficient d'élasticité transversal de la pièce.

Elles admettent les résultantes

$$(b) \qquad -G\frac{\lambda_\eta}{ds}S$$

et

$$(c) \qquad -G\frac{\lambda_\xi}{ds}S$$

dirigées respectivement suivant les axes $G\eta$ et $G\zeta$ eux-mêmes et ayant, par suite, aussi des moments nuls relativement aux trois axes.

Soient, de même,

$$\omega_\xi, \quad \omega_\eta, \quad \omega_\zeta$$

les angles des rotations autour des axes. Nous supposons les rotations et les moments comptés positivement dans le sens des flèches, soit de η vers ξ, de ξ vers ζ et de ζ vers η.

Une rotation ω_ξ imprime au point C' un déplacement normal à l'axe $G\xi$, égal à $r\omega_\xi$, r étant la distance du point C' à l'axe ou, ce qui revient au même, la distance CG (*fig. a'*).

Ce déplacement se projette en vraie grandeur suivant une petite ligne Cc perpendiculaire au rayon CG. Il fait naître une

force élastique égale à

$$G \times \sigma \times \frac{r\omega_\xi}{ds},$$

dirigé en sens contraire du mouvement. Toutes ces forces forment un couple; car, si l'on considère le point C_1 (*fig. a'*) symétrique de C par rapport au point G, il y naîtra une force élastique égale, parallèle et de sens contraire à la précédente.

Il résulte de là que les sommes des projections de ces forces sur les trois axes sont nulles.

Les sommes de leurs moments sont aussi nulles relativement aux axes $G\eta$, $G\zeta$, puisque toutes les forces considérées sont dans le plan $\eta G \zeta$. Il suffit donc de chercher la somme de leurs moments par rapport à l'axe $G\xi$. Or, puisque la force est dirigée en sens contraire du déplacement, son moment est

$$-G\sigma \frac{r\omega_\xi}{ds} \times r = -G\sigma r^2 \frac{\omega_\xi}{ds},$$

et la somme des moments pareils est

$$(a') \qquad -G\frac{\omega_\xi}{ds}\Sigma\sigma r^2 = -G\frac{\omega_\xi}{ds}I_\xi,$$

en désignant par I_ξ le moment d'inertie polaire de la section G.

Les rotations ω_η et ω_ζ donnent lieu à des déplacements longitudinaux tous parallèles à l'axe $G\xi$.

Soient η et ζ les coordonnées du point C.

La rotation ω_ζ produit un allongement de la fibre CC' (*fig. a*), représenté par

$$\omega_\zeta \times \eta,$$

faisant naître une force élastique

$$-E\sigma \times \frac{\omega_\zeta \times \eta}{ds}.$$

Celle ω_η produit un allongement positif ou négatif représenté par

$$-\omega_\eta \times \zeta,$$

faisant naître une force élastique

$$+E\sigma \times \frac{\omega_\eta \times \zeta}{ds},$$

de sorte que la force élastique totale résultant des deux flexions est

$$t = \frac{E}{ds}\sigma(\omega_\eta \times \zeta - \omega_\zeta \times \eta).$$

Toutes ces forces forment encore des couples, puisque pour le point symétrique C_1 de celui C (*fig. a'*) relativement à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire pour le point dont les coordonnées sont $-\eta$ et $-\zeta$, on aurait une force égale, parallèle et de sens opposé à la précédente.

Donc les sommes de leurs projections sur les trois axes sont nulles; il en est de même des sommes de leurs moments relativement à l'axe $G\xi$, puisqu'elles sont parallèles à cet axe. Il suffit donc de chercher les sommes de leurs moments relativement aux deux autres axes.

Relativement à l'axe η, le moment de la force t est, d'après les conventions sur les moments positifs,

$$-t \times \zeta,$$

et la somme des moments de ces forces, par rapport à $G\eta$, est

$$-\frac{E}{ds}(\omega_\eta \Sigma \zeta^2 \sigma - \eta_\zeta \Sigma \eta \zeta \sigma).$$

Mais, si les axes $G\eta$, $G\zeta$ sont dirigés suivant les axes principaux d'inertie de la section transversale, on a

$$\Sigma \eta \zeta \sigma = 0$$

et, par suite, la somme cherchée est

$$(b') \qquad -\frac{E\omega_\eta}{ds}\Sigma \zeta^2 \sigma = -\frac{E\omega_\eta}{ds} I_\eta,$$

en désignant par I_η le moment d'inertie de la section de la pièce relativement à l'axe principal $G\eta$.

On montrerait de même que la somme des moments des forces élastiques relativement à l'axe principal $G\zeta$ est

$$(c') \qquad +\frac{E\omega_\zeta}{ds} I_\zeta,$$

I_ζ étant le moment d'inertie de la section relativement à cet axe.

En résumé, les sommes des projections des forces élastiques développées dans une section G sur la tangente à la fibre moyenne

au point G et sur les axes principaux d'inertie de la section sont les expressions (a), (b), (c); les sommes des moments de ces forces relativement aux mêmes droites ont les expressions (a'), (b'), (c').

Par suite (§ 500) nous avons, entre les forces extérieures et les six éléments λ_ξ, λ_η, λ_ζ; ω_ξ, ω_η, ω_ζ du déplacement élastique d'une section relativement à une section infiniment voisine que ces forces déterminent, les six équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} N &= -\frac{E\lambda_\xi}{ds} S, \\ T_\eta &= -\frac{G\lambda_\eta}{ds} S, \\ T_\zeta &= -\frac{G\lambda_\zeta}{ds} S, \\ M_\xi &= -\frac{G\,\omega_\xi}{ds} I_\xi, \\ M_\eta &= -\frac{E\,\omega_\eta}{ds} I_\eta, \\ M_\zeta &= +\frac{E\,\omega_\zeta}{ds} I_\zeta. \end{aligned} \right.$$

La force N est la compression de la fibre moyenne; les forces T_η, T_ζ sont les composantes de l'effort tranchant, c'est-à-dire de la résultante de translation des actions élastiques tangentielles.

Le couple dont le moment est M_ξ se nomme le *couple de torsion*. Les couples M_η et M_ζ sont les *deux composantes du couple de flexion*.

On tire des équations précédentes

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_\xi &= -\frac{1}{E}\frac{N}{S} ds, \\ \lambda_\eta &= -\frac{1}{G}\frac{T_\eta}{S} ds, \\ \lambda_\zeta &= -\frac{1}{G}\frac{T_\zeta}{S} ds, \\ \omega_\xi &= -\frac{M_\xi}{GI_\xi} ds, \\ \omega_\eta &= -\frac{M_\eta}{EI_\eta} ds, \\ \omega_\zeta &= +\frac{M_\zeta}{EI_\zeta} ds, \end{aligned} \right.$$

qui fournissent les éléments des déplacements élémentaires produits par les forces données.

§ 502.

APPLICATION A UNE PIÈCE A FIBRE MOYENNE PLANE ET SYMÉTRIQUE, SOUMISE A DES FORCES NORMALES A SON PLAN. — Considérons, en particulier, une pièce à fibre moyenne plane comme celles que nous avons étudiées précédemment, c'est-à-dire symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne; seulement, au lieu de la supposer soumise uniquement à des forces situées dans ce plan, nous la supposerons soumise aussi à des forces normales à ce plan.

A cause de la symétrie, les axes principaux d'inertie G_η et G_ζ (*fig. a* et *a'*, p. 186) sont, le premier, situé dans le plan de la fibre moyenne, et le second normal à ce plan.

Or les forces extérieures normales au plan de la fibre moyenne ont évidemment des projections nulles sur les axes $G\xi$, $G\eta$ et des moments nuls relativement à l'axe $G\zeta$; donc les trois grandeurs

$$N, \quad T_\eta, \quad M_\zeta$$

des équations (2') ne dépendent que des forces situées dans le plan de la fibre moyenne et ont la même signification que celles désignées précédemment par les lettres

$$N, \quad T, \quad M.$$

Au contraire, les forces situées dans le plan de la fibre moyenne ont des moments nuls relativement aux axes $G\xi$, $G\eta$ et des projections nulles sur l'axe $G\zeta$, en sorte que les quantités

$$T_\zeta, \quad M_\xi, \quad M_\eta$$

ne dépendent que des forces normales au plan de la fibre moyenne.

Donc, une pièce comme celle dont il s'agit est soumise à des forces dirigées les unes dans le plan de la fibre moyenne, les autres normalement à ce plan; chacune de ces deux espèces de forces produit les mêmes déplacements que si l'autre n'existait pas.

Les forces situées dans le plan de la fibre moyenne ne produisent que les translations λ_ξ, λ_η et la rotation ω_ζ, c'est-à-dire des

déplacements qui laissent la fibre moyenne plane; ce sont les déplacements que nous avons étudiés précédemment et sur lesquels nous n'avons pas à revenir.

Les forces normales au plan de la fibre moyenne ne produisent que la translation λ_ζ et les rotations ω_ξ, ω_η, c'est-à-dire des déplacements tous normaux à ce plan. Ce sont ceux que nous allons envisager.

Après avoir ainsi étudié séparément les effets des forces situées dans le plan et de celles normales au plan de la fibre moyenne, il suffira d'ajouter ces effets pour avoir ceux dus à la coexistence de ces deux catégories de forces.

Les forces situées dans le plan de la fibre moyenne étant supposées nulles, on a

$$N = T_\eta = M_\zeta = 0$$

et, par suite, les équations (2′) du § 501 donnent

$$\lambda_\xi = \lambda_\eta = \omega_\zeta = 0.$$

Il n'y a pas de déplacement de la fibre moyenne dans son plan.

Les équations (2′), si l'on appelle $\mathfrak{T}$, au lieu de M_ξ, le moment de torsion; $\mathfrak{M}$, au lieu de M_η, le moment de flexion autour de la normale $G\eta$ à l'arc, se réduiront à trois

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_\zeta &= -\frac{1}{G}\frac{T_\zeta}{S}\,ds, \\ \omega_\xi &= -\frac{\mathfrak{T}}{GI_\xi}\,ds, \\ \omega_\eta &= -\frac{\mathfrak{M}}{EI_\eta}\,ds. \end{aligned} \right.$$

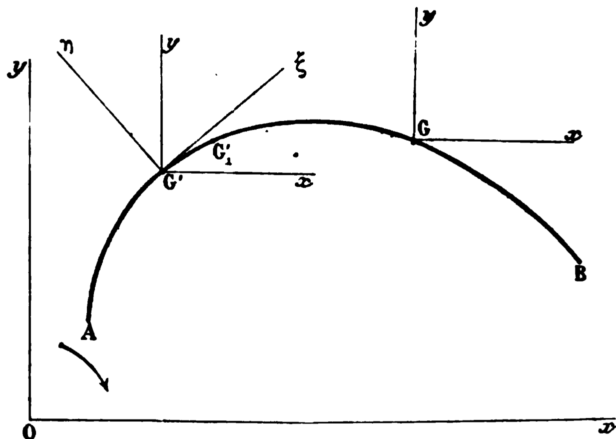
§ 503.

DÉPLACEMENTS ET ROTATIONS ÉLASTIQUES ABSOLUS DUS A DES FORCES DONNÉES, NORMALES AU PLAN DE LA FIBRE MOYENNE. — Rapportons à présent l'arc donné à trois axes *fixes* de coordonnées dont deux Ox, Oy (*fig.* 61, p. 194) situés dans le plan de la fibre moyenne, et le troisième Gz, non représenté, perpendiculaire à ce plan. Nous compterons les rotations et moments relatifs à ces axes positivement des y vers les x, des x vers les z et des z vers les y.

Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque G de la fibre moyenne; par ce point, menons deux axes Gx, Gy parallèles aux axes fixes Ox, Oy.

Soient Ω la rotation de la section G due à la déformation élastique de l'arc sous l'influence des forces normales au plan de la fibre moyenne; Ω_x, Ω_y les composantes de cette rotation autour des axes G_x, G_y, et soit w le déplacement élastique du point G, lequel est nécessairement normal au plan de la fibre moyenne.

Fig. 61.



Soient G′ un point de la fibre moyenne compris entre A et G et défini par l'arc AG′ $= s'$; G'_1 un point infiniment voisin de G′.

Nous désignerons par des lettres accentuées ce qui concerne le point G′.

Menons par ce point les axes G′ξ et G′η tangent et normal à la fibre moyenne, les η' positifs étant comptés dans le sens de la normale positive, c'est-à-dire telle que la normale G′η qu'on obtient lorsque le point G′ coïncide avec le point de l'arc dont la normale est parallèle à l'axe fixe Oy ait pour sens celui des y positifs.

Les déplacements du point G'_1 relativement à G′ se composent d'une translation λ'_ζ normale au plan de la fibre moyenne ou parallèle à l'axe des z et de deux rotations élémentaires ω'_ξ, ω'_η dont les valeurs sont fournies par les équations (3) où l'on accentue les seconds membres.

Menons par le point G' des lignes $G'x$, $G'y$ parallèles aux axes fixes.

La droite $G'\xi$ fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'};$$

la normale $G'\eta$ fait avec ces mêmes axes des angles dont les cosinus sont

$$\mp\frac{dy'}{ds'},\quad \pm\frac{dx'}{ds'}.$$

Mais, comme pour la normale parallèle à l'axe des y on doit avoir, d'après nos conventions, $\pm\frac{dx'}{ds'}=+1$, ce sont les signes supérieurs qu'il faut prendre, et ces cosinus sont

$$-\frac{dy'}{ds'},\quad +\frac{dx'}{ds'}.$$

Soient ω' la rotation de la section G'_1 relativement à celle G' supposée fixe; ω'_x, ω'_y ses composantes suivant G'_x, G'_y et ω'_ξ, ω'_η ses composantes suivant G'_ξ, G'_η. On a

$$\omega'_x=\omega'_\xi\frac{dx'}{ds'}-\omega'_\eta\frac{dy'}{ds'},$$

$$\omega'_y=\omega'_\xi\frac{dy'}{ds'}+\omega'_\eta\frac{dx'}{ds'},$$

ou, en vertu de (3),

$$\omega'_x=\left(-\frac{\mathfrak{E}'}{G'I'_\xi}\frac{dx'}{ds'}+\frac{\mathfrak{M}'}{E'I'_\eta}\frac{dy'}{ds'}\right)ds',$$

$$\omega'_y=-\left(\frac{\mathfrak{E}}{G'I'_\xi}\frac{dy'}{ds'}+\frac{\mathfrak{M}'}{E'I'_\eta}\frac{dx'}{ds'}\right)ds'.$$

Chaque section G'_1 éprouve ainsi une rotation autour de sa voisine en entraînant avec elle la section G. Donc, pour avoir l'angle total de la rotation de la section G, il faut composer toutes les rotations ω' des sections G'_1 comprises entre A et G, et de même, pour avoir le déplacement total ϖ du point G, il faut composer les déplacements qu'il éprouve par suite de chacune de ces rotations et par suite de chaque translation λ'_ζ.

Or, toutes les rotations ω'_x, étant parallèles, se composent en une

seule égale à leur somme; de même pour celles ω'_y. Si donc on appelle p_0, q_0 les rotations d'une section G_0 et que l'on compte les arcs depuis cette section, la rotation totale Ω de la section G se compose d'une rotation Ω_x autour de G_y et d'une rotation Ω_y autour de Gy, ces rotations ayant respectivement pour valeurs

$$(4)\quad \begin{cases} \Omega_x = p_0 + \displaystyle\int_0^s \left(-\frac{\mathfrak{G}'}{G'I'_\xi}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\mathfrak{M}'}{E'I'_\eta}\frac{dy'}{ds'}\right) ds', \\ \Omega_y = q_0 - \displaystyle\int_0^s \left(\frac{\mathfrak{G}'}{G'I'_\xi}\frac{dy'}{ds'} + \frac{\mathfrak{M}'}{E'I'_\eta}\frac{dx'}{ds'}\right) ds'. \end{cases}$$

D'autre part, le déplacement qu'éprouve le point G, par suite d'une rotation élémentaire ω'_x autour de $G'x$, est

$$-\omega'_x(y - y').$$

Celui qu'il éprouve, par suite d'une rotation autour de $G'y'$, est

$$+\omega'_y(x - x').$$

Ces déplacements, étant l'un et l'autre perpendiculaires au plan de la fibre moyenne ou parallèles à l'axe des z, s'ajoutent.

On doit d'ailleurs y ajouter le déplacement λ'_ζ dû à la translation, de sorte que le déplacement élémentaire total que subit le point G, par suite du mouvement de la section G'_1, relativement à celle G', est

$$\lambda'_\zeta - \omega'_x(y - y') + \omega'_y(x - x').$$

Il faut faire la somme de tous ces déplacements pour tous les points G' compris entre A et G et y ajouter celui dû au déplacement de A. Ce dernier se compose d'une translation parallèle à l'axe des z que nous appellerons w_0 et des rotations p_0, q_0, ce qui donne pour le point G un déplacement

$$w_0 - p_0(y - y_0) + q_0(x - x_0).$$

Par suite, en remplaçant λ'_ζ, $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$ par leurs valeurs, le déplacement total w du point G sera

$$(5)\quad \begin{cases} w = w_0 - p_0(y - y_0) \\ \qquad + q_0(x - x_0) - \displaystyle\int_0^s \frac{\mathfrak{M}'}{E'I'_\eta}\left[\frac{dy'}{ds'}(y - y') + \frac{dx'}{ds'}(x - x')\right] ds \\ \qquad + \displaystyle\int_0^s \frac{\mathfrak{G}'}{G'I_\xi}\left[\frac{dx'}{ds'}(y - y') - \frac{dy'}{ds'}(x - x')\right] ds' - \int_0^s \frac{1}{G}\frac{T_\zeta}{S} ds. \end{cases}$$

En composant les rotations Ω_x, Ω_y autour des axes Gx, Gy, on aura une rotation Ω autour d'un certain axe situé dans le plan de la fibre moyenne; cette rotation Ω et la translation w forment le déplacement total de la section quelconque G.

Dans les expressions de Ω_x et Ω_y, on peut supprimer les accents des lettres qui entrent sous les intégrales définies qui forment les seconds membres.

Dans l'expression de w, on peut faire sortir x et y des signes d'intégration et supprimer ensuite les accents sous les intégrales définies. Par suite, on voit facilement que les équations (4) et (5) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} \Omega_x = p_0 + \int_{s_0}^{s} \left(- \dfrac{\mathfrak{T}}{GI_\xi} \dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\mathfrak{M}}{EI_\eta} \dfrac{dy}{ds} \right) ds, \\ \Omega_y = q_0 - \int_{s_0}^{s} \left(\dfrac{\mathfrak{T}}{GI_\xi} \dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\mathfrak{M}}{EI_\eta} \dfrac{dx}{ds} \right) ds, \\ w = w_0 + p_0 y_0 - q_0 x_0 - \Omega_x y + \Omega_y x \\ \qquad + \int_{s_0}^{s} \dfrac{\mathfrak{M}}{EI_\eta} \left(y \dfrac{dy}{ds} + x \dfrac{dx}{ds} \right) ds \\ \qquad + \int_{s_0}^{s} \dfrac{\mathfrak{T}}{GI_\xi} \left(x \dfrac{dy}{ds} - y \dfrac{dx}{ds} \right) ds - \int_{s_0}^{s} \dfrac{1}{G} \dfrac{T_\zeta}{S} ds. \end{cases}$$

Au lieu des composantes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{T}$ des couples de flexion et de torsion, c'est-à-dire, au lieu des sommes des moments des forces extérieures comprises entre A et G, relativement aux axes $G\eta$ et $G\xi$, nous introduirons les sommes des moments de ces forces relativement aux axes de direction fixe Gx, Gy.

Soient X et Y ces sommes de moments.

On aura, d'après la théorie des couples

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{T} = X \dfrac{dx}{ds} + Y \dfrac{dy}{ds}, \\ \mathfrak{M} = -X \dfrac{dy}{ds} + Y \dfrac{dx}{ds}. \end{cases}$$

Par suite, les équations (6), après substitution et à cause de

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

deviennent

$$(8)\quad\begin{cases}\Omega_x = p_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{X}{GI_\xi} ds + \int_{s_0}^{s} \left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)\frac{dy}{ds} ds,\\ \Omega_y = q_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{Y}{EI_\eta} ds - \int_{s_0}^{s} \left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds} ds,\\ w = w_0 + p_0 y_0 - q_0 x_0 - \Omega_x y\\ \qquad + \Omega_y x - \int_{s_0}^{s} \frac{1}{G}\frac{T_\zeta}{S} ds + \int_{s_0}^{s} \left(\frac{Y}{EI_\eta} x - \frac{X}{GI_\xi} y\right) ds\\ \qquad + \int_{s_0}^{s} \left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left[(Xx - Yy)\frac{dx}{ds} + (Yx + Xy)\frac{dy}{ds}\right]\frac{dy}{ds} ds.\end{cases}$$

Si l'arc est très surbaissé, $\frac{dx}{ds}$ est voisin de l'unité et $\frac{dy}{ds}$ très petit. Les derniers termes sont donc alors très petits.

Même pour un arc peu surbaissé, puisque, dans les éléments de l'intégrale, entrent les produits $\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}$ et $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ de grandeurs moindres que l'unité, ces termes sont notablement moindres que les autres. Ils sont relativement à ceux-ci comme sont les termes de l'ordre de l'effort tranchant dans les problèmes précédemment étudiés. Si on les néglige, ainsi que le terme provenant de l'effort tranchant T_ζ, on aura

$$(8')\quad\begin{cases}\Omega_x = p_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{X}{GI_\xi} ds,\\ \Omega_y = q_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{Y}{EI_\eta} ds,\\ w = w_0 + p_0 y_0 - q_0 x_0 - \Omega_x y + \Omega_y x + \int_{s_0}^{s} \left(\frac{Y}{EI_\eta} x - \frac{X}{GI_\xi} y\right) ds.\end{cases}$$

§ 504.

APPLICATION A UN ARC ENCASTRÉ. — Si l'arc est encastré à son extrémité A, on aura

$$w_0 = p_0 = q_0 = 0.$$

Si la seconde extrémité est aussi encastrée, on aura pour cette extrémité

$$\Omega_x = 0, \qquad \Omega_y = 0, \qquad w = 0.$$

Si l'on emploie les formules exactes (8), il viendra, les intégrations étant effectuées dans toute l'étendue de l'arc,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &-\int \frac{X}{GI_\xi}ds + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}\right)\frac{dy}{ds}ds = 0,\\ &\int \frac{Y}{EI_\eta} + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}ds = 0,\\ &\int\left(\frac{Y}{EI_\eta}x - \frac{X}{GI_\xi}y\right)ds - \int \frac{1}{G}\frac{T_\zeta}{S}ds\\ &\quad + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left[(Xx - Yy)\frac{dx}{ds} + (Yx + Xy)\frac{dy}{ds}\right]\frac{dy}{ds}ds = 0, \end{aligned}\right.$$

§ 505.

THÉORÈME FONDAMENTAL RELATIF AUX ARCS ENCASTRÉS. — Si l'on se borne aux formules approchées (8′), celles (9) deviennent simplement

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{X}{GI_\xi}ds = 0,\\ &\int \frac{Y}{EI_\eta}ds = 0,\\ &\int\left(\frac{Y}{EI_\eta}x - \frac{X}{GI_\xi}y\right)ds = 0, \end{aligned}\right.$$

d'où ce théorème :

Si, aux divers éléments d'un arc encastré à ses extrémités et soumis à des charges normales quelconques, on applique des forces fictives situées dans le plan de la fibre moyenne et dont les composantes parallèles aux deux axes de coordonnées aient pour expressions

$$\frac{X}{GI_\xi}ds,\quad \frac{Y}{EI_\eta}ds,$$

ces forces se font équilibre.

Dans cet énoncé, X *et* Y *représentent les sommes des moments relativement à deux parallèles aux axes de coordonnées menées par l'élément ds, des charges qui agissent réellement sur l'arc entre l'élément ds et l'appui gauche de l'arc, y compris la réaction de l'appui.*

§ 506.

CAS D'UN ARC SYMÉTRIQUE ET SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉ. — Si l'arc est symétrique par rapport à la verticale de son sommet, les forces fictives ayant pour composantes $\frac{X}{GI_\xi}ds$, $\frac{Y}{EI_\eta}ds$ sont elles-mêmes symétriques par rapport à cette ligne. Si donc on la prend pour axe des y, la somme des moments de ces forces par rapport à l'origine des coordonnées et la somme de leurs projections sur l'axe des x sont évidemment nulles, c'est-à-dire que la première et la troisième des équations (10) sont satisfaites d'elles-mêmes et il ne reste que la seconde

$$\int \frac{Y}{EI_\eta}ds = 0, \tag{11}$$

exprimant qu'il suffit que la somme des projections verticales des forces fictives soit nulle pour que leur équilibre soit assuré.

Si l'on emploie les équations exactes (9), la première et la troisième sont aussi satisfaites par raison de symétrie et il ne reste que celle du milieu

$$\int \frac{Y}{EI_\eta}ds + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}\,ds = 0, \tag{12}$$

où il suffit, comme dans celle (11), d'effectuer les intégrations dans l'étendue d'une moitié de l'arc.

§ 507.

USAGE DES ÉQUATIONS RELATIVES A L'ARC ENCASTRÉ. — *a*. **Cas général.** — Soient U et V les sommes des moments relativement à deux droites Gx, Gy parallèles aux axes des x et des y menées par un point G de la fibre moyenne, de toutes les forces *directement appliquées* comprises entre ce point et l'extrémité gauche de la pièce, et soit Z la somme de ces mêmes forces, en sorte que U, V et Z sont trois fonctions données des coordonnées x et y du point G.

Soient

$$X_0,\ Y_0,\ T_0$$

les valeurs de X, Y, T_ζ répondant à la section extrême A.

On aura par définition, en prenant l'origine des coordonnées au point A,

$$(13)\qquad \begin{cases} T\zeta = T_0 + Z, \\ X = X_0 + T_0 y + U, \\ Y = Y_0 - T_0 x + V, \end{cases}$$

ce qui montre que X, Y, $T\zeta$ sont connus aux trois constantes près X_0, Y_0, T_0. Si l'on porte ces valeurs dans les trois équations de condition (9) ou (10), on aura exactement ou approximativement les valeurs de ces constantes.

b. **Cas d'un arc symétrique.** — Si l'arc et les charges sont symétriques et que, par suite, l'axe des y coïncide avec l'axe de symétrie, la section du sommet ne supporte évidemment ni torsion ni effort tranchant, c'est-à-dire qu'en ce point on a

$$X = 0, \qquad T\zeta = 0.$$

Soit $Y = \mathfrak{M}_0$ la valeur du moment de flexion en ce point. Alors on aura, en un point quelconque G de la moitié de droite de l'arc, qu'il suffit de considérer,

$$(14)\qquad \begin{cases} X = U', \\ Y = \mathfrak{M}_0 + V', \\ T\zeta = Z', \end{cases}$$

en appelant Z' la somme des forces directement appliquées comprises entre le sommet et le point considéré; U' et V' les sommes des moments de ces mêmes forces relativement à deux axes parallèles aux axes des x et des y, menés par ce point.

On a ainsi ce théorème de Statique :

Théorème I. — *Si un arc à fibre moyenne plane symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne et par rapport à la verticale de son sommet supporte des charges normales au plan de la fibre moyenne et elles-mêmes symétriques par rapport à la verticale du sommet :*

1° *L'effort tranchant ou résultante de translation des forces élastiques développées dans une section quelconque* G *de la pièce coïncide avec la résultante de translation des forces directement appliquées entre le point* G *et le sommet de l'arc;*

2° *La composante horizontale* X *de l'axe du couple résultant des forces élastiques développées dans la section* G *est égale à la somme des moments relativement à l'horizontale du point* G, *des forces directement appliquées dont il vient d'être parlé:*

3° *La composante* Y *verticale de cet axe est égale, à une constante près* $\mathfrak{M}_0$, *à la somme des moments de ces mêmes forces directement appliquées relativement à la verticale du point* G.

Il résulte de là qu'il suffit de déterminer la constante $\mathfrak{M}_0$ ou le moment de flexion au sommet de l'arc, pour avoir les forces élastiques en tous les points de l'arc.

Si l'on porte les expressions (14) dans l'équation (12), elle devient

$$o = \mathfrak{M}_0\left[\int \frac{ds}{EI_\eta} + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds\right] + \int \frac{V'}{EI_\eta} ds + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(U'\frac{dx}{ds} + V'\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds} ds,$$

d'où

$$(15) \qquad \mathfrak{M}_0 = -\frac{\int \frac{V'}{EI_\eta} ds + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(U'\frac{dx}{ds} + V'\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds} ds}{\int \frac{ds}{EI_\eta} + \int\left(\frac{1}{GI_\xi} - \frac{1}{EI_\eta}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds},$$

se réduisant, si l'on emploie la formule approchée (11), à

$$(16) \qquad \mathfrak{M}_0 = -\frac{\int \frac{V'}{EI_\eta} ds}{\int \frac{ds}{EI_\eta}},$$

soit, si E est constant

$$(16') \qquad \mathfrak{M}_0 = -\frac{\int \frac{V'}{I_\eta} ds}{\int \frac{ds}{I_\eta}}.$$

Si l'on pose

$$I_\eta \frac{dx}{ds} = I'_\eta,$$

on aura

$$(16'') \qquad \mathfrak{M}_0 = -\frac{\int \frac{V'}{I'_\eta} dx}{\int \frac{dx}{I'_\eta}}.$$

Si le moment d'inertie I_η relatif à la normale à la fibre moyenne est constant, on a

$$(16''')\qquad \mathfrak{M}_0 = -\frac{2\int V'\,ds}{s},$$

s étant la longueur de l'arc.

Si c'est I' qu'on regarde comme constant,

$$(16^{\text{iv}})\qquad \mathfrak{M}_0 = -\frac{2\int V'\,dx}{l},$$

l étant la longueur de la corde de l'arc.

Dans cette dernière hypothèse, le moment de flexion $\mathfrak{M}_0$ *au sommet de l'arc est indépendant de la flèche et est le même que dans une poutre droite de section constante, encastrée à ses deux extrémités, dirigée suivant la corde de l'arc et soumise, dans chacune de ses sections verticales, aux mêmes charges que celles qui agissent sur l'arc dans cette section.*

CHAPITRE VI.

ACTION DU VENT SUR LES FERMES EN CHARPENTE.

§ 508.

DONNÉES PRATIQUES RELATIVES A LA PRESSION DU VENT SUR LES OUVRAGES D'ART. — A la suite de l'accident du pont de la Tay, le *Board of Trade* a nommé, le 29 juillet 1880, une commission chargée d'étudier la pression du vent sur la superstructure des ouvrages d'art établis sur les lignes de chemins de fer.

Les conclusions du Rapport de cette Commission ont été reproduites dans le deuxième Volume de la *Revue générale des chemins de fer,* pour l'année 1881, p. 232, et dans la *Chronique* des *Annales d'Oppermann,* pour l'année 1882, p. 13.

Elles indiquent les conditions généralement exigées aujourd'hui, en Angleterre, pour la résistance des ouvrages d'art contre les effets du vent. En voici le résumé :

1° Il faut admettre, dans le calcul des ponts et viaducs de chemins de fer, une pression maxima du vent de $273^{kg},43$ par mètre carré.

2° Si le pont ou viaduc est formé de poutres pleines dont la hauteur est égale ou supérieure à celle des trains, on suppose la pression de $273^{kg},43$ appliquée sur la surface verticale d'une des poutres seulement; mais, si la hauteur des trains dépasse celle des poutres, on supposera cette pression appliquée à toute la surface verticale depuis le bas des poutres jusqu'au haut du train à son passage sur le pont.

3° Si les poutres sont à treillis, on calculera la pression sur la poutre exposée au vent en lui appliquant :

a. La pression de $273^{kg},43$ par mètre carré, comme si la poutre était pleine, depuis le niveau des rails, jusqu'au haut du train;

b. Une pression de $273^{kg},43$ par chaque mètre carré de la sur-

face verticale réelle des poutres au-dessous du niveau des rails ou dépassant la hauteur du train;

4° La pression sur la poutre non exposée au vent se calculera en supposant que le vent exerce, sur la portion de la surface de cette poutre, inférieure au niveau des rails ou dépassant le haut du train, une pression :

a. De $136^{kg},72$ par mètre carré, si la surface des vides ne dépasse pas les $\frac{2}{3}$ de la surface totale comprise dans l'élévation de la poutre;

b. De $205^{kg},07$ par mètre carré, si la surface des vides est comprise entre les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{4}$ de l'aire de la poutre;

c. de $273^{kg},43$ par mètre carré, si la surface des vides dépasse les $\frac{3}{4}$ de l'aire de la poutre;

5° La pression du vent contre les arches et les piles des ouvrages d'art devra être calculée, autant que possible, d'après les règles précédentes;

6° Afin d'assurer aux ponts et viaducs un coefficient de sécurité suffisant contre les effets du vent, il faudra donner à ces ouvrages une solidité assez grande pour supporter une pression du vent quadruple de celle qui est prévue par les règles précédentes; toutefois, dans le cas où la tendance du vent à renverser les ouvrages est combattue par la pesanteur, un coefficient de sécurité égal à *deux* suffira.

Dans le premier Volume de cet Ouvrage (§ 175) nous avons admis que la pression exercée par le vent sur la toiture des bâtiments ne dépasse pas 113^{kg} par mètre superficiel.

On comprend que, sur les viaducs de chemins de fer, franchissant des vallées où le vent s'engouffre, ce maximum puisse être notablement dépassé et qu'on ait ainsi été amené à admettre, pour de tels ouvrages, une pression maxima de $273^{kg},43$.

A l'observatoire de Bidston, près de Liverpool, on a observé des pressions du vent allant jusqu'à 438^{kg}; mais c'est là un cas d'exception. A Glascow, elles n'ont pas dépassé 238^{kg} et le chiffre adopté par la Commission paraît devoir offrir toute sécurité et même dépasser la mesure, dans certaines des dispositions précitées, puisqu'un vent de 273^{kg} renverserait les wagons.

§ 509.

DIVISION DU PROBLÈME RELATIF AUX EFFETS DU VENT SUR LES OUVRAGES D'ART. — On a observé que le renversement des wagons dont il vient d'être parlé a lieu par un vent produisant une pression qui varie de 146^{kg} à 195^{kg}. On peut admettre en moyenne que, quand la pression du vent atteint environ 150^{kg}, les trains ne circulent plus. Par suite, il convient de considérer les ouvrages d'art au point de vue des actions qu'ils éprouvent de la part du vent dans deux cas distincts. :

1° Lorsqu'ils portent la surcharge des trains : alors, aux effets de cette surcharge, il suffit d'ajouter ceux d'un vent produisant une pression de 150^{kg} par mètre carré de surface exposée normalement au vent;

2° Lorsqu'ils sont à vide : alors il convient d'admettre une pression de $273^{kg},43$. Dans ce cas, il n'y a pas lieu, bien entendu, de compter, dans les surfaces exposées au vent, celle des wagons, conformément aux indications des alinéas 2° et 3° du paragraphe précédent. On ne comptera que celles de la superstructure du pont lui-même.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un viaduc, comme celui de Garabit, formé par deux fermes ou arcs identiques entre eux, reliés par des pièces de contreventements et des entretoises soit verticales, soit normales à la fibre moyenne.

Nous supposerons l'ouvrage de structure symétrique par rapport au plan vertical mené par la droite qui joint les sommets des deux arcs.

Les pressions du vent sont donc elles-mêmes symétriques par rapport à ce plan.

Ceci posé, un ouvrage peut périr sous l'action du vent, soit par insuffisance de ses attaches aux culées, soit par insuffisance des dimensions des fermes principales, soit enfin par insuffisance des pièces qui relient ces fermes entre elles.

On aura donc à résoudre les problèmes suivants :

PROBLÈME I. — *Toutes les parties de l'ouvrage étant suppo-*

sées solidaires et d'une rigidité absolue, trouver les efforts maxima qui tendent à l'arracher de ses appuis.

PROBLÈME II. — *Les deux arcs étant supposés élastiques, mais reliés entre eux d'une façon absolument rigide, trouver les forces élastiques maxima qu'y développe le vent soit seul, soit concurremment avec les charges qu'ils ont à recevoir.*

PROBLÈME III. — *Déterminer les efforts les plus grands auxquels peuvent être exposées les pièces de contreventement et les pièces de pont ou entretoises, soit verticales, soit inclinées, qui relient les arcs.*

Ces diverses forces déterminées, les dimensions à donner à toutes les parties de l'ouvrage s'ensuivent.

§ 510.

PROBLÈME II. — Nous commencerons par le problème II qui consiste à déterminer les efforts que supportent les deux arcs supposés reliés entre eux d'une façon entièrement rigide, de sorte qu'une section transversale faite à travers tout l'ouvrage puisse être regardée comme restant sensiblement plane dans les déformations élastiques produites par le vent.

L'ensemble formé par les deux arcs peut donc être regardé comme une pièce dont la fibre moyenne est située dans le plan vertical passant par l'axe longitudinal de la voie. Cette pièce unique, nous l'appellerons *une arche* pour la distinguer de chacun des deux arcs dont elle est formée et sa fibre moyenne sera appelée *la fibre moyenne de l'arche.*

Cette ligne, au point de vue des effets du vent, doit toujours être regardée comme encastrée à ses extrémités ; cela est évident si les arcs sont eux-mêmes encastrés ; mais cela est vrai aussi lorsqu'ils sont posés sur tourillons simples, car, dans ce cas, la tangente à chaque extrémité de la fibre moyenne de l'arche ne peut que tourner autour de la droite qui joint les deux extrémités correspondantes des deux arcs, c'est-à-dire autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical qui la contient, mais elle ne peut sortir

de ce plan. Comme d'ailleurs les arcs et, par suite, les charges ou pressions horizontales produites par le vent sont symétriques par rapport à la verticale du sommet de l'arche, nous nous trouvons dans le cas *b* du § 507 et la recherche des forces élastiques ne comporte qu'une seule inconnue : le moment de flexion $\mathfrak{M}_0$ dans la section faite en ce sommet.

Il suffit donc de s'occuper d'une moitié de l'arche.

a. **Représentation des pressions produites par le vent.** — On commencera par évaluer les pressions produites par le vent. A cet effet, on divisera l'arc exposé en un certain nombre de parties; le plus simple est de prendre les parties égales ou inégales déterminées par les panneaux qui forment le contreventement.

Ainsi soient en plan (*fig*. A, *Pl. XL*) C_0B_0, C_1B_1 les fibres moyennes des moitiés de droite des deux arcs, en sorte que C_0 et C_1 soient les projections horizontales de leurs sommets, et B_0, B_1 leurs naissances.

Supposons que ces deux arcs soient reliés par des pièces de contreventement formées par huit panneaux en croix de saint André, projetés en $C_0C_1\,1\,1''$, $1\,1''\,2\,2''$, etc.

Admettons, par exemple, que le vent souffle dans le sens de la flèche, en sorte que c'est l'arc C_0B_0 qui est directement exposé. On appliquera en chacun des points 1, 2, 3, ..., 7 une force égale à la résultante des pressions du vent sur les surfaces des deux demi-panneaux contigus et au point C_0 ou o une force égale à la pression exercée sur la moitié du panneau $C_0C_1\,1\,1''$.

On obtient ainsi les forces dont les lignes d'action sont dirigées suivant C_0C, $1\,1''$, $2\,2''$, etc., et que nous appelons les forces 0, 1, 2, 3, ..., 7.

Les surfaces frappées qui fournissent ces forces seront évaluées selon les règles établies aux § 507 et 508.

Soient p la pression du vent par mètre carré et

$$s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots.\quad s_7,$$

les surfaces exprimées en mètres carrés, frappées respectivement dans la moitié de droite du panneau $C_0C_1\,1\,1''$ dans les deux moitiés contiguës de ce panneau et de celui $1\,1''\,2\,2''$, etc. Les

forces 0, 1, 2, ... seront respectivement

$$p \times s_0, \quad p \times s_1, \quad p \times s_2, \quad \ldots.$$

On devra, suivant les cas, faire $p = 273^{kg}, 45$, soit en nombre rond $p = 273$, ou $p = 150$.

Dans certains cas, les surfaces $s_0, s_1, \ldots$ sont les mêmes, que l'on considère la pression de 273^{kg} ou celle de 150^{kg}.

Dans d'autres, cela peut ne pas avoir lieu, parce que, dans le cas d'un vent de 150^{kg}, la surface des wagons peut intervenir, tandis qu'elle n'intervient pas dans le cas d'un vent de 273^{kg}.

Convenons qu'un mètre carré sera représenté par une certaine longueur, par exemple par 1^{mm}; alors, quel que soit p, une force de p^{kg} sera représentée par 1^{mm}.

Traçons (*fig.* A_0) le polygone des forces 0, 1, 2, ..., appliquées en o, 1, 2, ..., 7. Soit $p_0 q_0$ ce polygone.

b. **Recherche des composantes Y des couples élastiques.** — Traçons le polygone funiculaire $o_0 \beta_0$ de distance polaire quelconque q_0 des forces représentées sur le polygone $p_0 q_0$ en prenant le pôle o sur la perpendiculaire à $p_0 q_0$ menée par p_0 et le point de départ o_0 du polygone funiculaire sur cette même ligne et sur la verticale du sommet.

Ceci posé, la valeur du couple Y, dans une section quelconque G (*fig.* A) de l'arche, se compose du moment de flexion inconnu $\mathfrak{M}_0$ au sommet C et de la somme des moments relativement au point G des forces 0, 1, 2, 3, 4, comprises entre ce point et le sommet.

Or l'inconnue $\mathfrak{M}_0$ doit être telle qu'on ait

$$(17) \qquad \int \frac{Y\,ds}{I_\eta} = \int \frac{Y}{I_\eta \dfrac{dx}{ds}}\,dx = 0,$$

l'intégration étant étendue à tout l'arc ou, si l'on veut, à sa moitié.

Supposons d'abord que $I_\eta \dfrac{dx}{ds}$ soit constant, on aura

$$(17') \qquad \int Y\,dx = 0.$$

On tracera, comme pour une poutre droite encastrée, une ligne

de fermeture $c_0 b_0$ qui, par raison de symétrie, est horizontale, telle que la surface totale comprise entre le polygone funiculaire et sa ligne de fermeture soit nulle, telle, en d'autres termes, que les deux aires $O_0 c_0 J_0$ et $J_0 b_0 \beta_0$ soient égales.

Soient z'_0 les ordonnées du polygone comptées depuis $c_0 b_0$, ordonnées positives ou négatives suivant qu'elles sont au-dessus ou au-dessous de cette ligne.

Supposons ces ordonnées évaluées à l'échelle adoptée pour représenter les surfaces frappées par le vent, soit en millimètres, si le millimètre représente une surface de 1^{mq}. Alors $p \times z'_0$ représente cette ordonnée à l'échelle des forces, et l'on aura

$$(18) \qquad Y = p \times q_0 \times z'_0,$$

la distance polaire q_0 étant mesurée à l'échelle des longueurs, soit à l'échelle du dessin de l'arc.

Inversement, si on le juge plus commode, on peut mesurer les ordonnées à l'échelle du dessin et la distance polaire q_0 à l'échelle des surfaces frappées.

On aura, par suite de l'expression (18),

$$\int z'_0 \, dx = 0,$$

ou, si l'on divise $o_0 p_0$ en parties égales Δx et qu'on nomme z_0 l'ordonnée en un point de division

$$\Sigma z'_0 = 0,$$

ou enfin, en appelant h la distance inconnue $c_0 \alpha_0$ et z_0 les ordonnées comptées depuis $\alpha_0 \beta_0$

$$\Sigma(z_0 - h) = 0$$

ou, si n est le nombre de divisions,

$$(19) \qquad h = \frac{1}{n} \Sigma z_0;$$

h est la moyenne arithmétique des ordonnées z_0 des points de division.

Si l'on suppose, au contraire, I_η constant, on devra avoir

$$\int Y \, ds = 0$$

ou

$$\int z'_0 \, ds = 0$$

ou

$$\int (z_0 - h)\,ds = 0.$$

Si donc l'on divise, non plus l'horizontale $o_0 p_0$, mais (*fig.* B) la demi-fibre moyenne CB′ de l'arche en n parties égales Δs, on aura encore

$$\Sigma(z_0 - h) = 0$$

ou

$$h = \frac{1}{n}\Sigma z_0;$$

h sera la moyenne arithmétique des ordonnées des nouveaux points de division ainsi obtenus.

c. **Détermination des composantes X des couples élastiques.** — La composante X du couple élastique dans une section G (*fig.* A) ou G′ en élévation (*fig.* B) de la fibre moyenne de l'arche est la somme des moments relativement à l'horizontale du point G′ des forces directement appliquées entre G′ et le sommet de l'arc, forces dont les lignes d'action sont représentées en projection horizontale par les lignes C_0C_1, 11″, 22″, 33″, etc., et en projection verticale par les points C, 1′, 2′, 3′, 4′. Leurs grandeurs sont figurées sur le polygone des forces $p_0 q_0$ (*fig.* A_0).

On ne change pas les sommes de leurs moments relativement à des parallèles à la corde DB′ en les faisant tourner d'un angle droit autour de leurs points d'application, de façon à les rendre elles-mêmes parallèles à cette ligne. Elles auraient alors pour lignes d'action les horizontales des points C, 1′, 2′, etc.

Portons leur polygone des forces sur DB′ à partir de D. Soit Dq ce polygone identique à celui $p_0 q_0$.

Prenons sur la verticale DC la distance polaire $DO' = Op_0 = q_0$ et, partant de O′, construisons le polygone funiculaire $O'C\beta$ de ces forces. Si $\eta = g'g$ est le segment de l'horizontale du point G′ compris entre le polygone ainsi tracé et la droite CD, on aura au point G′ pour X l'expression

$$X = p \times q_0 \times \eta = p \times q_0 \times gg', \tag{20}$$

analogue à celle obtenue pour Y et avec les mêmes échelles.

Il peut être plus commode d'amplifier les ordonnées de l'arc pour le tracé de ce second polygone funiculaire.

Si on les amplifie, il suffit d'amplifier dans le même rapport la distance polaire, pour que le produit de la nouvelle distance polaire par les nouvelles abscisses η représente toujours le moment X.

d. **Recherche des couples de flexion et de torsion.** — On a, au point G', la valeur de X par l'équation (20), celle de Y par l'équation

$$Y = p \times q_0 \times z'_0 = p \times q_0 \times G_0 g_0.$$

Si donc, à partir de G', on porte une longueur verticale

$$G'g' = z'_0 = G_0 g_0,$$

ascendante si z'_0 est positif, et au bout de celle-ci une longueur horizontale $g'\gamma' = gg' = \eta$ de gauche à droite si η est positif, $G'\gamma'$ représente, au facteur $p \times q_0$ près, en grandeur, direction et sens, l'axe du couple des forces élastiques dans la section (G, G'). Soit ζ cette droite $G'\gamma'$.

Projetons la droite $G'\gamma' = \zeta$ sur la normale et la tangente à la fibre moyenne en G'; soient ζ_n et ζ_t les deux projections obtenues. On aura, au point G', pour les couples de flexion et de torsion, respectivement

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M} &= p \times q_0 \times \zeta_n, \\ \mathfrak{G} &= p \times q_0 \times \zeta_t, \end{aligned} \right.$$

ζ_n et ζ_t étant mesurés à l'échelle du dessin ou des longueurs, et q_0 à l'échelle des surfaces frappées par le vent; p est la pression du vent en kilogrammes par mètre carré de surface frappée.

e. **Effort tranchant T_ζ.** — L'effort tranchant en un point G' (*fig.* B) est la somme des forces directement appliquées entre ce point et le sommet de l'arc, c'est-à-dire la somme des forces appliquées en C', 1', 2', 3', 4'. On la relève directement sur le polygone des forces Dq.

Cette longueur Dg'' étant mesurée à l'échelle des surfaces frappées, on a

$$(22) \qquad T_\zeta = p \times Dg''.$$

§ 511.

DONNÉES A ADMETTRE DANS LE PROBLÈME II. — Ayant ainsi les efforts produits par le vent, pour trouver les dimensions à donner à chaque arc, on procédera ainsi :

a. **Tension ou pression longitudinale.** — Aux tensions ou pressions maxima que les charges verticales agissant sur le pont produisent dans les fibres extrêmes de chaque arc, on ajoutera celles que produit le vent.

Les premières ont été obtenues suivant les méthodes exposées dans les Chapitres précédents et ont pour expression

$$\frac{Mu}{I}$$

ou, si l'on veut être plus exact,

$$\frac{Mu}{I} + \frac{N}{S},$$

M étant, en valeur absolue, le plus grand moment de flexion et N la plus grande compression de la fibre moyenne produits dans l'un des arcs par les charges verticales, S est la section de cet arc ; I le moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe mené par son centre de gravité perpendiculairement au plan de la fibre moyenne et u la distance à la fibre moyenne de la fibre extrême la plus comprimée (plus généralement de celle des deux fibres extrêmes qui supporte une force élastique de même signe que N).

Sous l'influence du vent, si l'un des deux arcs qui composent l'arche est tendu, l'autre est comprimé. Considérons l'arc qui supporte des actions de même nature que celles qui figurent dans l'expression ci-dessus, soit, comme nous l'avons supposé, des compressions. La compression maxima sera

$$\frac{\mathfrak{M}\frac{l''}{2}}{I_\eta},$$

en désignant par l'' la distance de la fibre de l'arche entière la plus éloignée du plan de sa fibre moyenne I_η ; est, comme nous savons,

le moment d'inertie de l'arche par rapport à la normale à sa fibre moyenne.

Une section transversale de l'arche coupe les deux arcs et les pièces qui les réunissent. Négligeons (ce qui est favorable) ces dernières. Alors I_η est la somme des moments d'inertie des sections faites dans les arcs, ou deux fois le moment d'inertie de l'une de ces sections.

Mais, si l'on appelle $\frac{l'''}{2}$ la distance de la fibre de l'un des arcs, la plus voisine du plan de la fibre moyenne de l'arche entière, on aura

$$I_\eta > \frac{l''^2}{2} S$$

ou

$$\frac{I_\eta}{2} > \frac{l'''^2}{2} S$$

On a de même

$$I_\eta < \frac{l''^2}{2} S.$$

Mais, si l' est la largeur du pont comprise entre les plans des fibres moyennes des deux arches, on a très sensiblement

$$l'' = l''' = l',$$

et l'on peut poser très approximativement

(23) $$I_\eta = \frac{l'^2}{2} S;$$

par suite,

$$\frac{\mathfrak{M} l''}{2 I_\eta} = \frac{\mathfrak{M} l'}{l'^2 S} = \frac{\mathfrak{M}}{l' S},$$

et la force élastique totale maximum due aux charges et au vent est

$$\frac{M u}{I} + \frac{N}{S} + \frac{\mathfrak{M}}{l' S}.$$

Elle doit être moindre ou au plus égale à la force élastique R qu'on ne veut pas dépasser par unité de surface. On posera donc

$$\frac{M u}{I} + \left(N + \frac{\mathfrak{M}}{l'}\right)\frac{1}{S} = R.$$

Cette équation contient deux inconnues I et S, de sorte qu'elle

comporte une infinité de solutions, parmi lesquelles on choisira la plus convenable au point de vue pratique.

On peut aussi profiter de l'indétermination pour faire en quelque sorte que chaque arc soit d'égale résistance à la fois au point de vue de la flexion verticale due au moment M et au point de vue des efforts provenant de N et $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire qu'on peut poser

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{Mu}{I} = R', \\ \left(N + \dfrac{\mathfrak{M}}{l'}\right)\dfrac{1}{S} = R'', \\ \text{pourvu que} \\ R' + R'' = R. \end{cases}$$

Si l'on veut adopter pour R une valeur de 6^{kg}, par exemple, par millimètre carré, on pourra, suivant l'intensité du vent, prendre R' égal à 3^{kg}, 4^{kg} ou 5^{kg}, R'' égal à 3^{kg}, ou 2^{kg} ou $1^{kg},0$.

Pour l'évaluation de $\mathfrak{M}$, on adoptera ici la pression du vent

$$p = 150^{kg},$$

puisque c'est celle qui ne peut pas être dépassée quand les surcharges existent.

Il est évident qu'en général ce sera sous les actions réunies des surcharges les plus défavorables et du vent que les arcs éprouvent le plus de fatigue. Il pourrait se faire toutefois que certains points fussent plus fatigués par un vent donnant 273^{kg} de pression agissant seul, que par un vent de 150^{kg} agissant en même temps que les surcharges. Il sera donc bon de vérifier si les dimensions obtenues dans la première hypothèse seront suffisantes dans la seconde. Or, si $\mathfrak{M}'$ est la valeur numérique du moment de flexion obtenu en supposant un vent de 273^{kg}, il suffira de vérifier que les valeurs obtenues pour S sont telles qu'on ait partout

$$\frac{\mathfrak{M}'}{l'S} \leq R.$$

Si les surfaces des wagons n'interviennent pas, et que $\mathfrak{M}$ désigne le moment de flexion dû à la pression du vent de 150^{kg} d'abord

considérée, celle due à la pression de 273^{kg} sera

$$\mathfrak{M}' = \frac{273}{150}\mathfrak{M}.$$

b. **Forces élastiques transversales.** — Les forces élastiques tangentielles, ou ayant lieu dans une section même de l'arc, peuvent provenir soit des efforts tranchants dus aux charges verticales et au vent, soit des moments de torsion produits par ce dernier.

Soit T l'effort tranchant produit dans un arc, par les charges verticales, en sorte que sa valeur par unité de surface est

$$\frac{T}{S};$$

elle agit suivant la normale à l'arc.

Soit $\mathfrak{T}$ le moment de torsion dans la même section de l'arche. Il fait naître, dans chaque arc, une force élastique maximum égale à

$$\frac{\mathfrak{T}\frac{l}{2}}{I_\xi}$$

ou approximativement

$$\frac{\mathfrak{T}l'}{2I_\xi}.$$

D'ailleurs, on verrait par un raisonnemeut analogue à celui qui vient d'être fait que le moment d'inertie polaire I_ξ diffère très peu de celui I_η et qu'on peut poser

$$(25) \qquad I_\xi = \frac{l'^2}{2}S = I_\eta;$$

par suite, la force élastique due à la torsion est

$$\frac{\mathfrak{T}}{l'S}.$$

Elle a même direction que celle $\frac{T}{S}$ et elles doivent être ajoutées algébriquement, eu égard à leurs signes, ce qui donne

$$\frac{1}{S}\left(\frac{\mathfrak{T}}{l'} + T\right).$$

D'autre part, soit $\frac{T_\zeta}{S}$ l'effort tranchant par unité de surface dû

au vent. La force élastique totale se produisant dans la section sera

$$\frac{1}{S}\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{T}}{l'}+T\right)^2+T_\zeta^2},$$

et l'on devra vérifier si cette quantité est partout inférieure à l'effort de cisaillement R_c que l'on ne veut pas dépasser.

Ici encore, on supposera un vent de 150^{kg} seulement, en y comprenant, s'il y a lieu, les surfaces des wagons.

On devra ensuite vérifier que la même condition est remplie par un vent de 273^{kg} régnant sans surcharge, c'est-à-dire que partout

$$\frac{1}{S}\sqrt{\frac{\mathfrak{T}'^2}{l'^2}+T_\zeta'^2},$$

où $\mathfrak{T}'$ et T'_ζ sont les valeurs de $\mathfrak{T}$ et T_ζ pour un vent donnant une pression de 273^{kg}, est inférieure à R_c.

Si les surfaces des wagons n'interviennent pas, on a

$$\mathfrak{T}' = \frac{273}{150}\mathfrak{T}, \qquad T'_\xi = \frac{273}{150}T_\xi,$$

$\mathfrak{T}$ et T_ξ étant la torsion et l'effort tranchant trouvés pour un vent de 150^{kg}.

Si certaines des conditions précédentes n'étaient pas remplies en quelques points de l'arche, on renforcerait les arcs en ces points.

§ 512.

PROBLÈME I. — Le plus grand danger pour l'ouvrage d'être arraché de ses fondements existe évidemment lorsqu'il ne porte pas de surcharge et qu'il est soumis à un vent de 273^{kg}. Soient, dans ce cas,

$$\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{T}_1, \quad T_{1\xi}$$

les valeurs obtenues par les constructions précédentes pour les moments de flexion, de torsion et l'effort tranchant aux naissances.

Les arcs ont été déterminés de façon à résister à ces efforts; il faut qu'il en soit de même des culées. Il faut que les culées résis-

tent à un effort tangentiel ou de glissement total

$$\sqrt{T_\zeta'^2 + \frac{\mathfrak{T}'^2}{l'^2}}$$

et à un effort d'arrachement égal à

$$\frac{\mathfrak{M}'}{l'},$$

que, de plus, les scellements résistent également à ce dernier effort.

§ 513.

Problème III. — *a*. **Contreventements**. — Les contreventements relient les deux arcs de façon qu'ils soient solidaires pour résister au vent, comme l'âme d'une poutre en double T, ou les deux âmes d'une poutre à section rectangulaire évidée relient les tables supérieure et inférieure pour qu'elles résistent solidairement à des charges verticales.

En général, il existe ici deux systèmes de contreventements (ou deux âmes), l'un à la partie supérieure des tympans, l'autre du côté des intrados des arcs. En général aussi, les contreventements sont en forme de croix de saint André.

Il est clair que les charges verticales ne produisent aucun effort sur les contreventements qui, comme leur nom l'indique, n'ont à résister qu'au vent. Il faut donc les déterminer dans l'hypothèse d'un vent de 273^{kg} par mètre carré.

S'il en existe deux, nous supposerons qu'ils supportent des efforts sensiblement égaux ou que chacun d'eux résiste à la moitié de l'effort total du vent.

Il suffit donc de considérer l'un d'eux; supposons qu'il soit représenté en projection horizontale (*fig.* A) par les croix de saint André $C_0C_1 11''$, $11''22''$, ...

Nous admettrons que les deux barres diagonales de chaque croix supportent des efforts égaux. Cela équivaut à regarder les croix de saint André comme composées de deux systèmes simplement triangulés ou réticulaires, l'un formé par les lignes $11''$, $22''$, etc., et l'un des deux systèmes de diagonales; l'autre par ces mêmes lignes et l'autre système de diagonales.

D'après cela, il suffit de considérer l'un des deux systèmes réticulaires.

Faisons (*fig.* B) une section normale à l'arche en G'. Soit xGy (*fig.* A) l'horizontale de cette section.

Il est clair que, si nous ne tenons pas compte de la résistance des arcs à des actions transversales, tout l'effort tranchant $T_{1\zeta}$ dans la section est supporté par les barres diagonales comprises dans le système réticulaire que nous considérons.

Chaque barre supporte le quart de l'effort total, soit $\frac{1}{4}T_{1\zeta}$.

Donc, si, à partir du point G, on porte une longueur Gα représentant cette force à l'échelle du polygone des forces (*fig.* A_0), puis qu'on mène l'horizontale $\alpha\alpha'$ jusqu'à sa rencontre avec la diagonale partant de 5, la longueur Gα' est proportionnelle à la tension de cette diagonale. Cette tension est égale à

$$\frac{1}{4}p \times G\alpha' = \frac{273 \times G\alpha'^{\text{kg}}}{4},$$

Gα' étant mesuré à l'échelle des surfaces frappées par le vent (en millimètres, si un millimètre représente un mètre carré).

Soit S' la section d'une barre; la tension par unité de surface due à l'effort tranchant est

$$\frac{p \times G\alpha'}{4S'}.$$

Il faut y ajouter celle provenant de la torsion $\mathfrak{T}_1$. Or, si H est la hauteur de l'arc, mesurée suivant la section faite en G', la force élastique horizontale, par unité de surface que supporte un contreventement, est

$$\frac{\mathfrak{T}_1 \frac{H}{2}}{I_\xi}.$$

On peut encore prendre pour I_ξ les valeurs

$$I_\xi = \frac{l'^2}{2}S,$$

à moins qu'on ne veuille tenir compte aussi de la surface coupée dans les contreventements, ce qui donnerait sensiblement

$$I_\xi = \frac{l'^2}{2}S + \frac{H^2}{2}S';$$

chaque diagonale supporterait ainsi un effort

$$\frac{p\times G\alpha'}{4S}+\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{G}_1\frac{H}{2}}{I_\xi}=\frac{p\times G\alpha'}{4S}+\frac{\mathfrak{G}_1 H}{4I_\xi}.$$

C'est d'après cet effort qu'on déterminera les dimensions des barres diagonales.

Les barres perpendiculaires à C_0B_0 devront avoir des sections telles que chacune d'elles puisse résister à l'effort tranchant $T_{\iota\zeta}$ dans la section transversale qui la contient, comme on le voit en considérant successivement chacun des deux systèmes réticulaires et y faisant des sections parallèles aux barres diagonales.

La construction de l'effort $G\alpha'$ suppose que les angles, tels que $\alpha G\alpha' = \alpha' 55''$, sont projetés en vraie grandeur. Cela n'a lieu que si toutes les pièces du contreventement sont horizontales. Celles du contreventement supérieur remplissent, en général, cette condition, mais non celles du contreventement inférieur. Pour celui-ci, la figure A en représenterait le développement (et non la projection) sur un plan horizontal.

b. **Entretoises.** — Les deux arcs sont encore reliés par des entretoises dirigées suivant les normales à la fibre moyenne. Ces pièces, comme celles de contreventement, ne subissent pas d'action de la part des charges verticales; elles n'agissent que contre le vent, et ont pour objet d'achever de solidariser les arcs pour les faire résister aux effets de la torsion.

Considérons une de ces pièces, par exemple, celle qui serait placée dans le plan normal à l'arc en G', ayant pour trace sur le plan vertical (*fig.* B) la normale $\eta G'\eta$. Ce sera, en général, une poutrelle simplement triangulée ou en treillis, ou à croix de saint André; sa longueur est égale à l'écartement des faces intérieures de ces arcs, ou sensiblement celui l' des fibres moyennes de ces arcs.

Supposons-la d'abord simplement triangulée. Soient (*fig.* 62, p. 222) aa' et bb' les sections transversales des deux arcs et supposons la poutrelle formée par les lignes pleines, à savoir les barres principales ab, $a'b'$, les étrésillons $a'c$, cb' et le poinçon cc'.

Soit toujours $\mathfrak{G}_1$ le moment de torsion au point considéré dû à l'action d'un vent de 273^{kg}.

Il produit dans le plan moyen de chaque arc un effort par unité de surface

$$\frac{\mathfrak{C}_1 \frac{l'}{2}}{I_\xi};$$

et, si l'on prend

$$I_\xi = S\frac{l'^2}{2},$$

S étant la section d'un arc, cet effort sera

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{S l'}.$$

L'effort total sur chaque arc est donc sensiblement.

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{l'}.$$

On pouvait le trouver plus simplement en observant que le couple de flexion $\mathfrak{C}_1$ équivaut à deux forces verticales F et $-$F égales chacune à $\frac{\mathfrak{C}}{l'}$, agissant aux extrémités de la poutrelle.

Faisons (*fig.* B, *Pl. XL*) une section transversale $x_1 G'_1 y_1$ au travers des deux arcs, un peu à droite de la poutrelle, soit un peu à droite de G′, et considérons la portion de l'arche située à gauche de cette section.

La poutrelle devant être en équilibre sera à plus forte raison en équilibre si l'on fixe avec encastrement sa section du milieu cc'.

Faisons abstraction de la résistance transversale des arcs dans les parties coupées par la section $x_1 G'_1 y_1$. Alors les extrémités de la poutrelle doivent être regardées comme libres et soumises l'une à l'action de la force $F = \frac{\mathfrak{C}_1}{l}$, l'autre à l'action de la force $-$F.

Si l'on y fait une section xy (*fig.* 62, p. 222) coupant trois barres cb, cb', $c'b'$, on voit (§ 207) que les tensions t'' et t des deux barres cb, $c'b'$ sont

$$t'' = \frac{\mathfrak{C}H}{l},$$

$$t = -\frac{\mathfrak{C}H}{l},$$

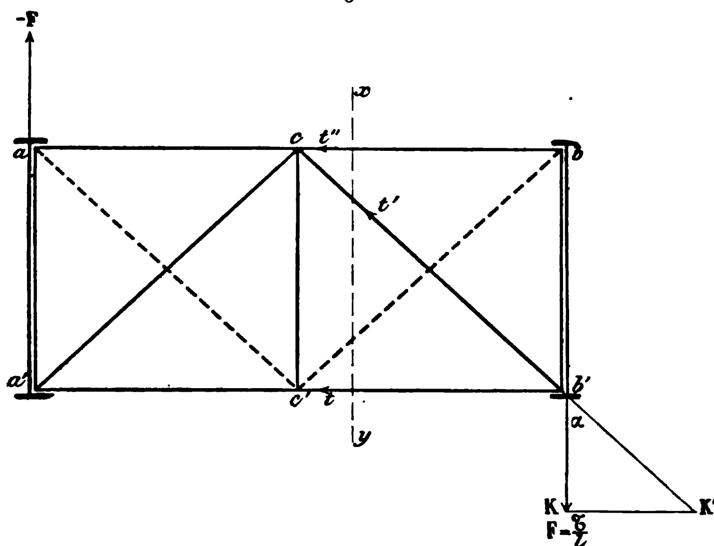
h étant la hauteur de la poutre. La barre cb est tendue, celle $c'b'$ est pressée.

D'ailleurs $t' = \frac{F}{\cos\alpha}$, en appelant α l'angle $cb'b$ ou

$$t' = \frac{b'K}{\cos\alpha} = b'K'.$$

Si la poutre est à croix de saint André, on admettra que les deux barres diagonales supportent chacune une tension $\frac{1}{2}b'K'$, l'autre une pression pareille.

Fig. 62.



Si la poutre est à paroi pleine, son moment de flexion maximum est au milieu et égal à

$$\frac{\mathfrak{E}}{l} \times \frac{H}{2}.$$

C'est d'après cette valeur qu'on déterminera son moment d'inertie supposé constant.

Son effort tranchant maximum est $\frac{\mathfrak{E}}{l}$, ce qui détermine sa section.

Quelle que soit la structure des poutrelles, elles sont, en général, toutes pareilles. On choisira donc la valeur la plus grande de $\mathfrak{E}_1$ et l'on déterminera les dimensions de toutes les poutrelles d'après cette valeur.

§ 514.

SUR L'EMPLOI DES FORMULES EXACTES. — Toute la difficulté est de trouver, pour une pression donnée du vent, le moment de flexion $\mathfrak{M}_0$ au sommet de l'arc. La formule (15) en donne la valeur.

Mais nous avons vu que les moments d'inertie I_ξ et I_η sont sensiblement égaux et proportionnels en chaque point à l'aire S de la section de l'un des deux arcs en ce point. En observant de plus que les coefficients d'élasticité E et G sont constants, on obtient

$$\mathfrak{M}_0 = -\frac{\int \frac{V'}{S}\,ds + \left(\frac{E}{G}-1\right)\int \frac{U'\frac{dx}{ds}+V'\frac{dy}{ds}}{S}\,\frac{dy}{ds}\,ds}{\int \frac{ds}{S} + \left(\frac{E}{G}-1\right)\int \frac{1}{S}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds}.$$

On prend généralement le rapport $\frac{E}{G} = 3$, d'où

$$\frac{E}{G} - 1 = 2.$$

Comme S est inconnu, supposons d'abord $S\frac{dx}{ds}$ constant, on aura

$$\mathfrak{M}_0 = -\frac{\int V'\,dx + 2\int\left(U'\frac{dx}{ds} + V'\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}\,dx}{\frac{l}{2} + 2\int\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dx}.$$

Divisons (*fig.* B, *Pl. XL*) l'horizontale en un certain nombre de parties égales à Δx en n parties, en sorte que

$$n\Delta x = \frac{l}{2};$$

alors on pourra écrire approximativement

$$\mathfrak{M}_0 = -\frac{\Sigma V' + 2\sum\left(U'\frac{dx}{ds} + V'\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}}{n + 2\sum\left(\frac{dy}{ds}\right)^2},$$

où les sommes Σ se rapportent à tous les points de division ; $\Sigma V'$,

par exemple, est la somme des valeurs qu'a V' aux points de division.

Or, en un point G' de la fibre moyenne, U' représente la somme des moments relativement à l'horizontale passant par G' des forces directement appliquées entre C et G'; V' est la somme des moments de ces mêmes forces relativement à la verticale du point G'.

Les polygones funiculaires des figures B et A_0 donnent ces grandeurs. On a

$$U' = p \times q_0 \times gg' = p \times q_0 \times \eta,$$
$$V' = p \times q_0 \times \zeta_0,$$

en appelant ζ_0 (*fig.* A_0) l'ordonnée du polygone funiculaire $o_0 \beta_0$ comptée depuis l'horizontale o_0. Donc

$$\mathfrak{M}_0 = -p \times q_0 - \frac{\Sigma\zeta_0 + 2\sum\left(\eta\frac{dx}{ds} + \zeta_0\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}}{n + 2\sum\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}.$$

La somme $\Sigma\zeta_0$ des ordonnées ζ_0, répondant aux points de division, se mesure directement sur la *fig.* A_0.

A partir de chaque point de division G' (*fig.* B), portons une longueur horizontale η et une longueur verticale ζ_0 et construisons la diagonale du rectangle déterminé par ces longueurs. Projetons cette diagonale sur la tangente à la fibre moyenne. La projection représentera

$$\eta\frac{dx}{ds} + \zeta_0\frac{dy}{ds}.$$

Projetons cette dernière ligne sur la verticale; la nouvelle projection sera

$$\left(\eta\frac{dx}{ds} + \zeta_0\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}.$$

La somme des longueurs ainsi obtenues pour les points de division étant doublée donne le second terme du numérateur.

On a donc ainsi le numérateur sous forme d'une longueur qu'on mesurera à l'échelle des surfaces frappées, soit en millimètres si, comme nous l'avons supposé, 1 millimètre représente 1 mètre carré.

Le dénominateur est une grandeur purement numérique. Il est

facile de mesurer sur l'épure, pour chaque point de division, la grandeur $\frac{dy}{ds}$, c'est-à-dire le sinus de l'angle que la tangente à la fibre moyenne en ce point fait avec l'horizontale et de l'élever au carré, ou de construire directement $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ pour chaque point. On prendra, sur chaque tangente à la fibre moyenne, une longueur déterminée λ, par exemple, 20mm à partir du point de contact ; on projettera λ en λ' sur la verticale, puis de nouveau λ' en λ'' sur la tangente. La longueur λ'' mesurée en millimètres représente $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ multipliée par $\overline{20}^2$.

Faisons la somme $\Sigma\lambda''$ et multiplions-la par

$$\frac{2}{\overline{20}^2} = \frac{2}{400} = \frac{1}{200};$$

nous aurons le second terme du dénominateur.

Ayant ainsi, en millimètres, la valeur absolue de

$$h_0 = \frac{\Sigma\zeta_0 + 2\sum\left(\eta\frac{dx}{ds} + \zeta_0\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}}{\eta + 2\sum\left(\frac{dy}{ds}\right)^2},$$

portons cette longueur h_0 à partir de l'horizontale $o_0 p_0$ (*fig.* A_0) ; nous aurons une ligne $c'_0 b'_0$. Ce sera la ligne de fermeture qui remplacera celle $c_0 b_0$ obtenue dans la précédente approximation. Tout le reste des opérations ne subira aucun changement. En effet, on a

$$X = U = p \times q_0 \times \eta,$$

comme précédemment, et

$$Y = \mathfrak{M}_0 + V' = p \times q_0(-h_0 + \zeta_0) = p \times q_0 \times z_0,$$

en appelant z''_0 les ordonnées du polygone funiculaire compté depuis $c'_0 b'_0$, tandis que précédemment on avait

$$Y = p \times q_0 \times z'_0,$$

z'_0 étant les ordonnées comptées de $c_0 b_0$.

La substitution de cette dernière ligne à celle $c'_0 b'_0$ est donc bien le seul changement à apporter aux précédentes constructions.

§ 515.

CAS D'UN PONT A POUTRES DROITES. — Si, au lieu d'arcs, on a des poutres droites, l'étude des actions du vent ne souffre aucune difficulté. L'ensemble des poutres résiste au vent comme une poutre encastrée à ses extrémités. Les contreventements étant horizontaux, leurs diagonales ont à résister à l'effort tranchant dû au vent. Les entretoises verticales sont théoriquement inutiles, la torsion n'existant pas.

TROISIÈME SECTION.

PONTS SUSPENDUS A TABLIERS RIGIDES.

CHAPITRE VII.

THÉORIE GÉNÉRALE.

§ 516.

PONTS SUSPENDUS RIGIDES CONSIDÉRÉS. — Nous considérons une ferme de pont suspendu comme composée d'un câble relié, par des tiges de suspension, à une poutre rigide.

Dans les ouvrages de grande portée, les parties extrêmes de la poutre sont, en outre, supportées par des haubans dits *câbles de rigidité,* partant des sommets des piles ou culées.

Lorsqu'il en est ainsi, on doit se demander si ces portions de poutre doivent néanmoins recevoir des tiges de suspension ou s'il est préférable de ne faire régner ces dernières que dans la partie centrale de la poutre, celle qui n'est pas directement rattachée aux haubans.

Les ingénieurs américains ont adopté la première solution. En France, on préfère, en général, la seconde.

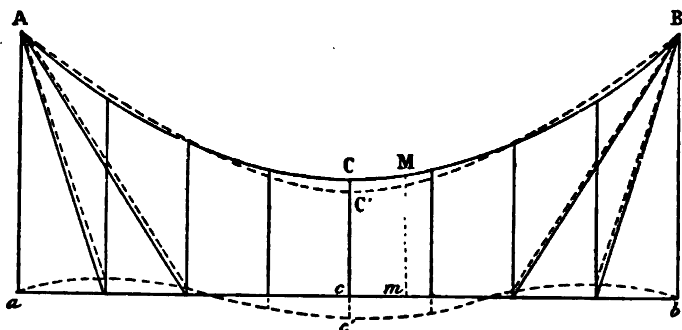
En réalité, elles présentent l'une et l'autre des avantages et des inconvénients, ainsi que nous allons le montrer.

§ 517.

MODE DE FONCTIONNEMENT DES POUTRES RIGIDES. — Qu'il y ait ou non des haubans, si une poutre droite, dont la fibre moyenne est *acb* (*fig.* 63), est reliée à un câble parabolique ACB dans toute son étendue, et si une surcharge vient à se produire au milieu *c* de la

poutre, ce point s'abaisse en entraînant avec lui le point correspondant C du câble, à son tour, le câble se relève vers les côtés : la poutre, obligée de suivre le mouvement par le fait des tiges de suspension, prend une forme sinusoïdale comme celle indiquée en pointillé.

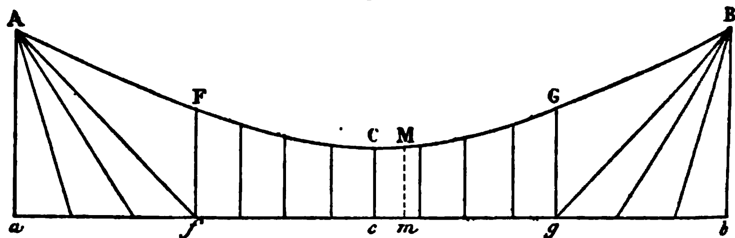
Fig. 63.



Il en résulte que précisément les parties de la poutre supportées par les haubans se relèveront et, par suite, les haubans seront détendus et fonctionneront incomplètement.

Si, au contraire (*fig.* 64), les tiges de suspension ne règnent que dans la partie centrale *fg* de la poutre, un poids placé en *c* abais-

Fig. 64.



sera non seulement ce point, mais aussi très légèrement les points *f* et *g*, de façon que les haubans seront tendus; l'effet des tiges de suspension sera de relever des portions de la poutre comprises entre *f* et *g*, de manière que la fibre moyenne affectera une forme sinusoïdale avec des flèches plus faibles que dans le cas précédent.

Ainsi, dans ce cas, il y a avantage à supprimer les tiges de suspension dans la partie du tablier soutenue par les haubans.

Il en sera autrement si nous envisageons les effets d'un fort abaissement de température. Ce phénomène aura pour conséquence de raccourcir le câble et de le relever; il soulèvera donc le tablier dont la fibre moyenne formera une courbe tournant sa concavité vers le bas. Les haubans, par suite, cesseront d'être tendus.

Si, dans cet état, une charge vient à passer sur le pont, elle sera donc, en très grande partie, supportée par le câble et la poutre, comme si les haubans n'existaient pas.

Si donc les parties extrêmes du tablier ne sont pas rattachées au câble, il arrivera que, pendant le passage de la charge sur ces parties, il n'y aura que la poutre pour la supporter, ce qui pourrait avoir des inconvénients.

On pourrait s'opposer à ce soulèvement de la poutre par quelques haubans inférieurs. Nous verrons que ces haubans ne supporteraient pas, en général, de grands efforts.

Supposons à présent un accroissement de température. Le câble s'allongera et ce sont les tiges de suspension qui se détendront.

La poutre se courbera sous l'influence de son propre poids et de celui du tablier en tournant sa concavité vers le haut, et cette fois les charges seront portées par la poutre principalement et par les haubans, s'ils existent, tant que la poutre n'aura pas pris une courbure assez grande pour que les tiges de suspension recommencent à fonctionner. Il importe que la courbure nécessaire pour cela ne soit pas telle qu'elle détermine, dans la poutre, des tensions trop élevées auxquelles viendraient encore s'ajouter celles produites par les surcharges.

Remarque. — Observons que, si les tiges de suspension ne règnent (*fig.* 64) que dans la partie centrale FG, le câble sera parabolique dans cette partie et rectiligne dans les parties extrêmes.

§ 518.

RÈGLE DE RANKINE. NÉCESSITÉ DE LA REVISER. — On voit, par ce qui précède, qu'une poutre reliée à un câble, que ce soit avec ou sans l'assistance de haubans, éprouve, en général, des efforts élastiques

tout autres que ceux qui se développent dans une poutre librement posée sur appuis.

Rankine a admis que, si une pareille poutre reçoit une surcharge quelconque de P^{kg}, les forces élastiques qui s'y produisent sont les mêmes que celles qui se produiraient dans la poutre supposée détachée du câble sous l'influence :

1° De cette surcharge;

2° D'une charge fictive *ascendante,* égale à P^{kg} et uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre, en sorte que, si l est cette longueur, la charge ascendante serait de $\frac{P^{kg}}{l}$ par mètre courant.

Cette règle ne paraît, en tout cas, applicable que si la surcharge est symétrique par rapport au milieu de la poutre, puisqu'une charge non symétrique ne saurait être équilibrée par une charge uniforme, quelle qu'elle soit, à moins de faire intervenir les réactions des appuis, auquel cas la charge ascendante qu'on peut adopter devient entièrement arbitraire.

Elle ne fournit d'ailleurs aucune indication sur les effets de la température, dont il est bon de pouvoir se rendre compte.

Par ces motifs, elle a besoin d'être revisée et complétée.

§ 519.

RÈGLES NOUVELLES. — Nous résumons ici très sommairement les résultats les plus essentiels qui ressortent de la théorie qui va suivre.

1° Si une poutre posée sur appuis simples à ses extrémités, non munie de haubans, de longueur l, soumise à une surcharge unique de P^{kg}, ayant α pour abscisse (les abscisses sont comptées depuis l'appui gauche de la poutre), est reliée à un câble, on peut la traiter comme si cette liaison n'existait pas, pourvu qu'à la surcharge P on adjoigne une charge fictive ascendante, uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre à raison de q^{kg} par mètre courant, q étant fourni par la formule

$$(a) \qquad q = 5\frac{P}{l}\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\left[1+\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\right].$$

Si la charge est au milieu, c'est-à-dire si $\alpha = \frac{l}{2}$, on a

$$q = \frac{25}{16} \frac{P}{l},$$

au lieu de

$$q = \frac{P}{l},$$

donné par la règle de Rankine.

2° Si la poutre est soumise à un nombre quelconque de surcharges, il suffit de calculer q pour chacune d'elles et de faire la somme des résultats obtenus.

3° De là résulte, ainsi que nous le verrons, que la règle de Rankine s'applique pour une surcharge uniforme régnant sur une moitié du pont, ainsi que pour une surcharge régnant sur tout le pont. Dans ce dernier cas, la règle indique que le câble supporte la totalité de la surcharge.

4° Supposons que la température du câble vienne à s'accroître de τ° (τ étant négatif si la température baisse) comptés depuis la température de pose ; il en résulte, dans les tiges de suspension, un accroissement négatif ou positif de la tension représenté par

$$(b) \qquad q' = \frac{-15 \mathrm{EI}\, \delta\tau}{f l^2};$$

f est la flèche et δ le coefficient de dilatation du câble par la chaleur ; E et I représentent respectivement le coefficient d'élasticité et le moment d'inertie de la poutre.

5° A ces tensions q ou q', il faut ajouter la tension due à la charge permanente.

6° Si la poutre considérée, au lieu d'être simplement appuyée, est encastrée à ses deux extrémités, les règles 1°, 2°, 5° s'appliquent encore, mais la valeur (a) de q doit être remplacée par celle ci-après

$$(a') \qquad q = 30 \frac{P}{l} \frac{\alpha^2}{l^2} \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2.$$

7° Si une poutre de longueur l est reliée à un câble par une partie centrale de longueur l_0 et soutenue à ses extrémités sur des longueurs $\frac{l - l_0}{2}$ par des haubans, on peut, au point de vue des

charges, traiter la travée centrale de longueur l_0 comme si elle était encastrée et appliquer la formule (a'), en y remplaçant l par l_0.

En ce qui touche la température, s'il s'agit d'une diminution de température, les haubans ne résistant pas à son effet (§ 517), il faut appliquer la formule (b). Le résultat obtenu étant évidemment plus défavorable que s'il s'agit d'un accroissement de température, puisque alors les haubans résistent, il n'y a pas, en général, à considérer ce dernier cas.

8° Pour le mode d'application de ces diverses règles et les corollaires qui en découlent, les charges les plus défavorables, etc., on ne peut que renvoyer aux paragraphes qui en traitent dans la suite de ce travail. On ajoutera cependant que le moment maximum M, qu'une charge isolée de P^{kg} produit sur une poutre de longueur l, reliée à un câble, est :

(a). Si la poutre repose sur appuis simples, $M = 0,085\,Pl$;
(b). Si elle est encastrée, $M = 0,06\,Pl$.

§ 520.

FORMULE FONDAMENTALE. — Soit (*fig.* 65) ACB un fil élastique de section constante ou variable suspendu à ses extrémités et en équilibre sous l'influence de charges verticales uniformes ou non.

Supposons que ces charges viennent à être modifiées dans un rapport constant quelconque ; la courbe restera en équilibre ; mais la tension, en chacun de ses points, sera augmentée dans le même rapport que les forces et sa longueur totale sera un peu accrue en raison de l'élasticité du fil ; soit AC'B sa nouvelle forme, qui sera très peu différente de celle qu'elle avait d'abord.

Si les charges sont modifiées dans un rapport qui, sans être rigoureusement constant, varie très peu d'un point à un autre, la nouvelle courbe d'équilibre différera encore très peu de la première.

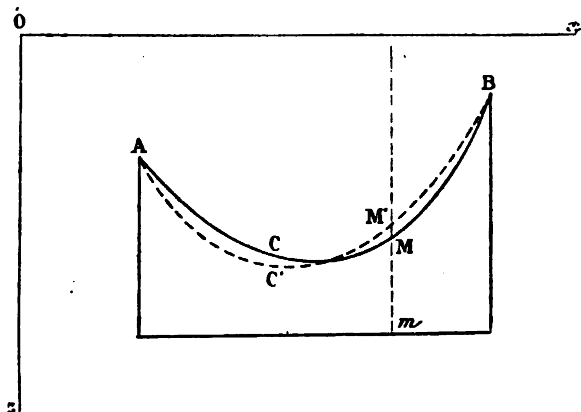
Réciproquement, si les charges qui agissent sur un fil en équilibre ACB viennent à être modifiées d'une façon *très notable*, mais néanmoins telle que la nouvelle forme d'équilibre qui en résulte pour le fil soit très peu différente de la première, on peut

affirmer que toutes les charges n'ont pu être modifiées que dans un rapport sensiblement constant.

Supposons qu'il en soit ainsi. Rapportons le fil à deux axes de coordonnées, l'un Ox horizontal, l'autre Oz vertical descendant.

Soient z l'ordonnée d'un point M de la courbe primitive répondant à l'abscisse x et z' l'ordonnée du point M' répondant à la même abscisse, après la déformation.

Fig. 65.



Soient s et s' les longueurs ACB et AC'B des deux courbes ou plus généralement de deux portions correspondantes quelconques de ces courbes.

Si t est l'accroissement de tension qui s'est produit dans un élément ds, par suite de la modification apportée aux charges, il en résultera, pour cet élément, un allongement

$$\frac{t\,ds}{E_0 S_0},$$

en désignant par S_0 la section du fil et par E_0 le coefficient d'élasticité de la matière qui le compose.

Si, d'autre part, la température de pose a varié de τ^o, τ étant positif ou négatif, suivant qu'il y a eu accroissement ou diminution de température et si δ est le coefficient de dilatation du fil par la chaleur, l'élément ds aura encore subi un allongement positif ou

négatif égal à $\delta\tau\, ds$, de sorte que sa longueur définitive ds' sera

$$ds' = ds\left(1 + \delta\tau + \frac{t}{E_0 S_0}\right).$$

On déduit de là, pour l'allongement total $s' - s$ d'une portion quelconque du fil de longueur primitive s, comptée depuis l'origine des s, une première expression

$$s' - s = \delta\tau s + \frac{1}{E_0}\int_{s_0}^{s} \frac{t\,ds}{S_0}.$$

Mais, si Q est l'accroissement de tension subi au point où la tangente est horizontale ou, si l'on veut, l'accroissement produit dans la poussée de l'arc, l'accroissement correspondant de la tension en un point quelconque M sera

$$t = Q\frac{ds}{dx}.$$

Si, de plus, comme cela a lieu pour les ponts suspendus, on suppose la section du fil constante, on aura donc

$$(\alpha) \quad s' - s = \delta\tau s + \frac{Q}{E_0 S_0}\int_0^{s} \frac{ds^2}{dx} = \delta\tau s + \frac{Q}{E_0 S_0}\int_{x_0}^{x_1}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] dx,$$

en appelant x_0 et x_1 les abscisses des extrémités du fil ou, plus généralement, de la partie du fil que l'on considère, quelle qu'elle soit.

D'autre part, on a

$$s = \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

et, en appelant z' l'ordonnée du point d'abscisse x après la déformation,

$$\begin{aligned} s' &= \int_{x_0 + \Delta x_0}^{x_1 + \Delta x_1} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz'}{dx}\right)^2} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz'}{dx}\right)^2} + \left[\Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}\,\right]_0^1, \end{aligned}$$

en appelant Δx_0 et Δx_1 les projections horizontales des déplacements des deux extrémités de la partie du fil que l'on considère,

c'est-à-dire les variations qu'ont subies les abscisses x_0 et x_1, et

$$\left[\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}\right]_0^1,$$

la différence des valeurs obtenues en remplaçant successivement, dans la quantité entre crochets, l'abscisse x par ses valeurs extrêmes x_1 et x_0 et retranchant la seconde de la première.

De là, on déduit, pour l'allongement $s'-s$ d'une portion quelconque du fil, cette nouvelle expression

$$\begin{aligned} s'-s &= \int_{x_0}^{x_1} dx\left[\sqrt{1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right]+\left[\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}\right]_0^1 \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx\frac{\frac{d(z'+z)}{dx}\times\frac{d(z'-z)}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}+\left[\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}\right]_0^1. \end{aligned}$$

Soit

$$z'-z=\Delta z$$

la quantité très petite, positive ou négative, dont s'est abaissé le point M; on pourra écrire, en négligeant les quantités de l'ordre du carré de Δz,

$$(\beta)\qquad s'-s=\int_{x_0}^{x_1} dx\frac{\frac{dz}{dx}\frac{d\Delta z}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}+\left[\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right]_0^1.$$

Égalant les deux expressions (α) et (β) trouvées pour l'allongement $s'-s$, on aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} dx\frac{\frac{dz}{dx}\frac{d\Delta z}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}+\left[\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right]_0^1 \\ &\quad =\delta\tau s+\frac{Q}{E_0S_0}\int_{x_0}^{x_1}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]dx. \end{aligned}\right.$$

Si, comme il arrive en général, le câble est très surbaissé, on

pourra négliger $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ devant l'unité, ce qui donne

$$(1\ bis)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{dz}{dx}\frac{d\Delta z}{dx}dx + \Delta x_1 - \Delta x_0 = \delta\tau s + \frac{Q(x_1 - x_0)}{E_0 S_0}.$$

Supposons à présent le fil ACB ou, plus généralement, une portion quelconque de ce fil reliée à une poutre droite par des tiges de suspension.

Les tiges de suspension, dans un pont suspendu, travaillent toujours à de faibles tensions et leur allongement est négligeable devant le balancement général du pont. Il en résulte que, partout où règnent les tiges, l'abaissement positif ou négatif Δz d'un point M du câble est égal à celui du point correspondant *m* de la fibre moyenne de la poutre *ab* (*fig.* 65, p. 233).

Nous désignerons l'abaissement du point *m* par la lettre y, en sorte que partout où règnent les tiges de suspension, c'est-à-dire partout où le câble a la forme parabolique, on a

$$\Delta z = y.$$

Convenons d'appliquer la formule (1) à cette partie du câble représentée par l'arc FG (*fig.* 64, p. 228), les points F et G coïncidant respectivement avec A et B si les tiges de suspension existent partout. Nous pourrons, par suite, remplacer, dans les formules, Δz par y. Soient α_0 et α_1 les inclinaisons sur l'horizontale des tangentes FA et GB aux extrémités de la partie courbe du câble, en sorte que, pour $x = x_0$, on ait

$$\frac{dz}{dx} = \tang \alpha_0$$

et, pour $x = x_1$,

$$\frac{dz}{dx} = \tang \alpha_1.$$

La formule (1) devient donc

$$(1')\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \frac{\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}dx + \frac{\Delta x_1}{\cos\alpha_1} - \frac{\Delta x_0}{\cos\alpha_0} \\ &\quad = \delta\tau s + \frac{Q}{E_0 S_0}\int_{x_0}^{x_1}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]dx, \end{aligned}\right.$$

et la formule approchée (1 *bis*) devient

$$(1'')\qquad \int_{x_0}^{x_1}\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx}dx+\Delta x_1-\Delta x_0=\delta\tau s+\frac{Q(x_1-x_0)}{E_0 S_0}.$$

Comme cette dernière est, en général, très suffisante dans la pratique, nous nous bornerons à la développer, en indiquant, chemin faisant, les légères modifications qui permettraient de développer de même la formule (1′).

On sait que, dans toute la longueur d'une poutre droite, quelle qu'elle soit, fût-elle à plusieurs travées solidaires, non seulement l'abaissement y d'un point de la fibre moyenne, mais aussi les deux premières dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ de cette fonction varient sans aucun saut brusque, même au passage des piles. Il en résulte qu'on peut appliquer au premier terme de chacune des formules (1′) ou (1″) l'intégration par parties en y regardant le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ comme une différentielle exacte. On aura, pour la formule (1″),

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx}dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dy}{dx}dz=z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1-z_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-\int_{x_0}^{x_1}z\frac{d^2y}{dx^2}dx.$$

La formule fondamentale des poutres droites

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI},$$

où E est le coefficient d'élasticité et I le moment d'inertie constant ou variable de la section de la poutre, donne d'ailleurs

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-\frac{1}{E}\int_{x_0}^{x_1}\frac{M}{I}dx.$$

Par suite,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx}dx=\frac{1}{E}\int_{x_0}^{x_1}\frac{M(z-z_1)}{I}dx+(z_1-z_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$

et la formule (1″) devient

$$\frac{1}{E}\int_{x_0}^{x_1}\frac{M}{I}(z-z_1)\,dx=\Delta x_0-\Delta x_1-(z_1-z_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\delta\tau s+\frac{Q(x_1-x_0)}{E_0 S_0}.$$

Mais, au degré d'approximation où nous nous plaçons, comme $\delta\tau$

est déjà très petit, le produit $\delta\tau s$ peut être confondu avec

$$\delta\tau(x_1 - x_0),$$

puisque $x_1 - x_0$ est la projection horizontale de l'arc $s = \mathrm{FG}$. De même, les allongements positifs ou négatifs des tangentes AE et GB peuvent être confondus avec ceux de leurs projections horizontales; d'ailleurs ces derniers, puisque les points A et B sont fixes, sont représentés par Δx_0 et $-\Delta x_1$. Donc $\Delta x_0 - \Delta x_1$ est l'allongement total des tangentes AF et FG; $\delta\tau s - \frac{Q(x_1 - x_0)}{E_0 S_0}$ est celui de la courbe FCG. Donc

$$\Delta x_0 - \Delta x_1 + \delta\tau s + \frac{Q(x_1 - x_0)}{E_0 S_0}$$

est l'allongement de tout le fil ACB.

En le confondant avec celui de sa projection horizontale *ab* que nous désignerons par l, il sera représenté par

$$\left(\delta\tau + \frac{Q}{E_0 S_0}\right) l.$$

Donc

$$(2) \qquad \frac{1}{E_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{I}(z - z_1)\,dx = \left(\delta\tau + \frac{Q}{E_0 S_0}\right) l - (z_1 - z_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$

formule vraie en négligeant $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ devant l'unité, *quelle que soit la forme du fil* (¹).

(¹) Il est facile de comprendre comment les mêmes considérations s'appliqueraient à la formule exacte (1').

On peut, dans cette formule, remplacer Δx_0 et Δx_1 par leurs valeurs en fonction des déplacements verticaux des points f et g de la poutre, déplacements que nous appellerons y_0 et y_1. En effet, les composantes du déplacement du point F parallèlement aux axes sont

$$\Delta x_0 \quad \text{et} \quad y_0.$$

La projection de ce déplacement sur AF est donc

$$\Delta x_0 \cos\alpha_0 + y_0 \sin\alpha_0.$$

Tel est l'allongement positif ou négatif de AF.

La longueur AF, si l'on appelle a_0 et b_0 les coordonnées du point de suspen-

Supposons les points F et G de niveau et prenons la droite FG pour axe des x, en sorte que

$$z_0 = z_1 = 0.$$

On aura

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{I} z\,dx = \left(E\,\delta\tau + \frac{EQ}{E_0 S_0}\right) l,$$

et, si l'on prend le point F pour origine des coordonnées et qu'on désigne par l_0 la longueur fg,

$$(3\ bis) \qquad \int_0^{l_0} \frac{M}{I} z\,dx = \left(E\,\delta\tau + \frac{EQ}{E_0 S_0}\right) l.$$

Cette formule est identique à celle qu'on obtiendrait pour dé-

---

sion A, est

$$(x_0 - a_0)\cos\alpha_0 + (y_0 - b_0)\sin\alpha_0.$$

Donc l'allongement de AF par unité de longueur est

$$\frac{\Delta x_0 \cos\alpha_0 + y_0 \sin\alpha_0}{(x_0 - a_0)\cos\alpha_0 + (z_0 - b_0)\sin\alpha_0}.$$

Mais cet allongement est dû à la température et à la tension de AF. L'allongement par unité de longueur dû à la température est $\delta\tau$; celui dû à la tension est $\frac{Q}{E_0 S_0 \cos\alpha_0}$. Donc

$$(2) \qquad \frac{\Delta x_0 \cos\alpha_0 + y_0 \sin\alpha_0}{(x_0 - a_0)\cos\alpha_0 + (z_0 - b_0)\sin\alpha_0} = \delta\tau + \frac{Q}{E_0 S_0 \cos\alpha_0}.$$

On aurait de même

$$(2') \qquad \frac{\Delta x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \sin\alpha_1}{(x_1 - a_1)\cos\alpha_1 + (z_1 b_1)\sin\alpha_1} = -\left(\delta\tau + \frac{Q}{E_0 S_0 \cos\alpha_1}\right),$$

se réduisant, si l'angle α_0 est très petit et l'angle α_1 très voisin de 180°, à

$$(2'') \qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x_0 &= \left(\delta\tau + \frac{Q}{E_0 S_0}\right)(x_0 - a_0), \\ \Delta x_1 &= \left(\delta\tau + \frac{Q}{E_0 S_0}\right)(x_1 - a_1). \end{aligned}\right.$$

Les formules (2) et (2') donnent les déplacements horizontaux des points F et G en fonction de ceux des points correspondants f et g. Celles (2'') donnent directement leurs valeurs approchées.

Ceci posé, pour intégrer par parties, observons que, la courbe considérée étant une parabole, la dérivée seconde $\frac{d^2 z}{dx^2}$ de son ordonnée par rapport à son abscisse

terminer la poussée de l'arc, s'il était rendu rigide, en lui supposant une section de moment d'inertie I et d'aire $\frac{E}{E_0}S_0$. Le terme $\frac{EQ}{E_0 S_0}l$ serait celui provenant de la compression de la fibre moyenne.

Or on sait que, dans les arcs aussi surbaissés surtout que le sont les ponts suspendus, ce terme est négligeable. On peut donc écrire les formules ci-dessus

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{I} z\, dx = E\,\delta\tau\, l,$$

$$(5) \qquad \int_{0}^{l_0} \frac{M}{I} z\, dx = E\,\delta\tau\, l.$$

---

est une constante. Nous pouvons, par suite, écrire

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dx}\, dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{d^2 z}{dx^2}} \int_{x_1}^{x_1} \frac{dy}{dx}\, d\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{d^2 z}{dx^2}} \left[\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}{\cos\alpha_1} - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}{\cos\alpha_0} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{d^2 y}{dx^2}\, ds \right].$$

Les formules des poutres droites rappelées plus haut donnent, par suite,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dx}\, dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{d^2 z}{dx^2}} \left[\frac{1}{E} \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{I} \left(\frac{ds}{dx} - \frac{1}{\cos\alpha_1} \right) dx + \left(\frac{1}{\cos\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_0} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \right].$$

En portant cette valeur dans l'équation (1′), elle devient

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI} \left(\frac{ds}{dx} - \frac{1}{\cos\alpha_1} \right) dx + \left(\frac{1}{\cos\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_0} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)_0$$

$$= \frac{d^2 z}{dx^2} \left\{ - \frac{\Delta x_1}{\cos\alpha_1} + \frac{\Delta x_0}{\cos\alpha_0} + \delta\tau s + \frac{Q}{E_0 S_0} \int_{x_0}^{x_1} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx \right\}.$$

(Si les tiges de suspension règnent sur toute la longueur du pont, les points F

§ 521.

MODE D'EMPLOI DE LA FORMULE FONDAMENTALE. — Nous supposons que le câble parabolique supporte la charge permanente qui règne sur la portion de poutre qui y est suspendue.

C'est, en effet, là son rôle, la poutre ne devant intervenir que s'il y a des charges accidentelles, pour réduire les balancements que celles-ci tendent à provoquer. Ainsi, sous l'influence de la seule charge permanente, la fibre moyenne de la poutre est censée rigoureusement rectiligne. Si p_0 est cette charge par mètre courant,

---

et G coïncident avec les points fixes A et B du câble. On a $\Delta x_0 = \Delta x_1 = 0$.)

Calculons les éléments qui entrent dans la dernière formule en supposant, comme il arrive toujours dans la pratique, la courbe très surbaissée.

Soit $ab = l$ la portée de la poutre ou de l'arc AB;

Soient $fg = l_0$ la projection horizontale de la partie parabolique FG et f la flèche de cette partie, c'est-à-dire l'ordonnée verticale comprise entre le milieu de la corde FG et la parabole.

Prenons le point F pour origine, en sorte que $x_0 = z_0 = 0$ et soient $x_1 = l_0$ et $z_1 = b$ les coordonnées du point l. L'équation de la courbe sera

$$z = \frac{4f}{l_0^2} x(l_0 - x) + \frac{b}{l_0} x,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{8fx}{l_0^2} + \frac{4f + b}{l_0},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{8f}{l_0^2}.$$

On a

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

ou

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dz}{dx}\right)^4.$$

Si, dans cette formule, on fait $x = 0$, soit $\frac{dz}{dx} = \frac{4f + b}{l_0}$, on a

$$\frac{1}{\cos \alpha_0}.$$

Si l'on y fait $x = l_0$, on a

$$\frac{1}{\cos \alpha_1}.$$

En négligeant les termes en $\left(\frac{dz}{dx}\right)^4$, on retrouverait la formule approchée (2) du texte.

ce sera aussi là la tension des barres par mètre courant de tablier.

Supposons à présent qu'il se produise une surcharge *quelconque* composée d'autant de forces qu'on voudra et un changement quelconque de température.

Le câble restant sensiblement parabolique, la tension p_0 des barres sera, en vertu de la remarque faite au commencement du paragraphe précédent, amplifiée dans un rapport constant, c'est-à-dire qu'elle sera encore uniforme. Soit $p_0 + q$ sa valeur; c'est la constante q qu'il s'agit de trouver.

Si on la connaît, on pourra considérer la poutre comme détachée du câble, à la condition d'adjoindre aux charges qui la sollicitent réellement la charge fictive ascendante $p_0 + q$.

Or les charges appliquées à la poutre se composent :

1° De la charge permanente p_0;

2° De la surcharge donnée quelle qu'elle soit.

Les forces descendantes p_0 provenant de la charge permanente neutralisent celles ascendantes pareilles provenant de $p_0 + q$; on peut donc faire abstraction de la charge permanente et envisager la poutre comme une poutre ordinaire, c'est-à-dire détachée du câble et soumise :

1° A la surcharge seulement;

2° A une charge fictive ascendante uniforme de q^{kg} par mètre courant.

Soient M_s le moment de flexion que la surcharge seule produirait sur la poutre si elle n'était pas reliée au câble; soit m le moment de flexion que, dans les mêmes conditions, produirait une charge uniforme descendante de 1^{kg} par mètre courant, de sorte que M_s et m sont deux fonctions de l'abscisse x qu'on détermine par les méthodes ordinaires relatives aux poutres droites.

Le moment de flexion, produit en réalité sur la poutre regardée comme liée au câble, sera

$$M = M_s - qm. \tag{6}$$

Il sera donc connu dès que l'on connaîtra la constante q.

On aura, par suite aussi, l'accroissement Q que la surcharge et la température déterminent dans la poussée de l'arc par la formule

connue

(7) $$Q = \frac{q l_0^2}{8f},$$

poussée qui viendra se joindre à celle

(7 *bis*) $$Q_0 = \frac{p_0 l_0^2}{8f},$$

due à la charge permanente.

Remplaçant dans (5) le moment de flexion M par sa valeur (6), on aura

(8) $$\int_0^{l_0} \frac{M_s z\,dx}{I} - q\int_0^{l_0} \frac{m z\,dx}{I} = E\,\delta\tau l,$$

d'où

(8 *bis*) $$q = \frac{\int_0^{l_0} \frac{M_s z\,dx}{I}}{\int_0^{l_0} \frac{m z\,dx}{I}} - \frac{E\,\delta\tau l}{\int_0^{l_0} \frac{m z\,dx}{I}},$$

qui donne la valeur de q.

On voit que la valeur de q, par suite aussi le moment de flexion et la poussée dus aux actions simultanées d'une surcharge et d'un changement de température, s'obtiennent en ajoutant les effets dus à chacune de ces causes agissant séparément.

Si l'on appelle q' la valeur de q due à la surcharge, on a

(9) $$q = q' = \frac{\int_0^{l_0} \frac{M_s z\,dx}{I}}{\int_0^{l_0} \frac{m z\,dy}{I}},$$

et, si le moment d'inertie de la poutre est constant,

(9 *bis*) $$q = q' = \frac{\int_0^{l_0} M_s z\,dx}{\int_0^{l_0} m z\,dx}.$$

Si q'' est la valeur de q due à la température, on aura

$$(10) \qquad q = q'' = -\frac{\mathrm{E}\,\delta\tau\,l}{\displaystyle\int_0^{l_0}\frac{mz\,dx}{\mathrm{I}}},$$

$$(10\ bis) \qquad q = q'' = -\frac{\mathrm{EI}\,\delta\tau\,l}{\displaystyle\int_0^{l_0} mz\,dx},$$

suivant que I est constant ou variable.

Dans toutes ces formules, le dénominateur est à former une fois pour toutes; le numérateur varie seul avec le mode de surcharge.

D'ailleurs l'ordonnée de la parabole, si f est sa flèche, est

$$(11) \qquad z = \frac{4f}{l_0^2}x(l_0 - x).$$

Comme dans tous les problèmes de résistance, on commencera par faire abstraction de la température et l'on supposera la section inconnue de la poutre constante.

La formule (9 *bis*) donne alors la valeur de q due aux diverses surcharges qu'on peut avoir à considérer; la formule (6), le moment de flexion correspondant en chaque point de la poutre, ce qui permet d'en déterminer le moment d'inertie constant ou variable de manière à en faire un solide d'égale résistance, par la formule

$$\frac{\mathrm{M}h}{2\mathrm{I}} = \mathrm{R},$$

h étant sa hauteur et R la tension maxima à laquelle on veut la faire travailler.

On pourrait aussi trouver d'emblée et exactement le solide d'égale résistance répondant à une *surcharge donnée* par la méthode indiquée d'abord par M. l'Inspecteur général des Orgeries pour les poutres ordinaires et que nous avons depuis étendue aux arcs [1].

Ayant la valeur de I, on peut étudier les valeurs de q dues à la

(1) *Voir* Note I à la fin du Volume.

température par l'une des formules (10) ou (10 *bis*); les formules (7) et (6) donnent ensuite, l'une la poussée que la température détermine dans l'arc, l'autre le moment de flexion qu'elle détermine dans la poutre, ce qui permet de rectifier, s'il y a lieu, la valeur d'abord trouvée pour le moment d'inertie de façon que la poutre résiste aux effets de la température.

Les valeurs obtenues pour la poussée permettent, d'autre part, de déterminer la section de l'arc qui, elle, est toujours constante dans la pratique.

En ce qui touche la température, on voit qu'une augmentation de température donne une valeur négative de q et, par suite, de la poussée de l'arc. Donc, pour avoir la valeur maxima de cette poussée et calculer définitivement la section de l'arc, il faut supposer celui-ci à la température la plus basse possible, comme cela est évident *a priori*, ce qui donne à τ une valeur négative.

Au contraire, pour placer la poutre dans les conditions les plus défavorables, il faut supposer τ positif, en sorte que la valeur (10) de la force ascendante (laquelle soulage naturellement la poutre), soit la plus petite possible.

Théoriquement, la charge et la température pourraient être combinées de façon que la valeur totale (8 *bis*) de q soit nulle ou que la poutre se trouve dans le même cas que si elle n'était pas rattachée au câble. Mais cela n'arrive pas dans la pratique.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION AU CAS OU IL N'Y A PAS DE HAUBANS.

§ 522.

APPLICATION DE LA FORMULE FONDAMENTALE AU CAS OU IL N'Y A PAS DE HAUBANS. — La marche qui précède est générale, quel que soit le mode d'attache de la poutre, fût-elle à travées solidaires.

Nous allons l'appliquer au cas d'une poutre à une seule travée et en supposant d'abord qu'il n'y ait pas de haubans.

Alors la portée l_0 du câble parabolique sera égale à celle de la poutre que nous avons appelée l.

Le moment de flexion m produit dans une poutre à deux appuis simples par une charge uniforme de 1^{kg} est

$$(13) \qquad m = \frac{x(l-x)}{2}$$

et, comme

$$z = \frac{4f}{l^2}x(l-x),$$

le dénominateur de (9 *bis*) est

$$(14) \qquad \int_0^l mz\,dx = \frac{\frac{4f}{l^2}}{2}\int^l x^2(l-x)^2\,dx = \frac{4f}{l^2}\frac{l^5}{60} = \frac{fl^3}{15},$$

et la tension produite dans les barres de suspension par une surcharge quelconque est

$$(15) \qquad q = q' = \frac{60}{l^5}\int_0^l \mathrm{M}_s x(l-x)\,dx.$$

Celle due à la chaleur est

$$(15') \qquad q = q'' = -\frac{15\mathrm{EI}\,\delta\tau}{fl^2}$$

si I est constant, et

$$(15'') \qquad q = q'' = -\frac{E\,\delta\tau\,l^3}{2f\displaystyle\int_0^l \frac{mx(l-x)^2\,dx}{I}}$$

si I est variable.

On voit que la température influe d'autant moins que la longueur de la poutre est plus grande.

1° **Surcharge uniforme.** — Pour une surcharge uniforme de p_s^{kg} régnant sur toute la longueur de la poutre, cette première approximation ne peut fournir que $q = p_s$, c'est-à-dire qu'une telle surcharge serait entièrement supportée par le câble. Cela est d'accord avec la règle de Rankine, et cela est évident *a priori;* car, sous une surcharge uniforme, le câble reste rigoureusement parabolique; si donc on néglige, comme nous le faisons, son allongement soit élastique, soit calorifique, il conserve rigoureusement sa forme, puisqu'il ne peut exister qu'un seul arc de parabole d'axe vertical, de longueur donnée, dont les extrémités sont deux points donnés.

Par suite, la poutre reliée à l'arc ne subira elle-même aucune flexion.

Cela ressort bien aussi, sans calcul, de la formule (9 *bis*). En effet, le moment de flexion M_s dû à une surcharge uniforme de p_s^{kg} est égal à p_s fois celui dû à une charge de 1^{kg}; donc

$$M_s = p_s m$$

et, par suite,

$$(16) \qquad q = p_s \frac{\displaystyle\int_0^l mx(l-x)\,dx}{\displaystyle\int_0^l mx(l-x)\,dx} = p_s.$$

Ainsi, pour une surcharge uniforme, on est amené à construire le câble de façon qu'il puisse, à lui seul, supporter cette surcharge, ainsi que la charge permanente.

Ce résultat de l'Analyse n'a rien que de naturel. Le câble, on l'a déjà dit, est fait pour porter les charges uniformes et la poutre ne doit intervenir que quand il se présente d'autres surcharges, de celles que le câble ne pourrait pas porter sans se déformer considérablement.

2° **Surcharge isolée.** — Supposons à présent une surcharge isolée de P^{kg} placée à une distance α de l'extrémité gauche de la poutre.

D'après la théorie des poutres posées sur deux appuis, le moment de flexion M_s produit est, à savoir :

A gauche de la surcharge, soit pour $x < \alpha$,

$$M_s = P\frac{l-\alpha}{l}x; \tag{17}$$

à droite de la surcharge, soit pour $x > \alpha$,

$$M_s = P\frac{\alpha}{l}(l-x). \tag{17 bis}$$

Donc

$$\int_0^l M_s x(l-x)\,dx = \frac{P(l-\alpha)}{l}\int_0^\alpha x^2(l-x)\,dx + \frac{P\alpha}{l}\int_\alpha^l x(l-x)^2 dx.$$

La première intégrale est

$$\int_0^\alpha x^2(l-x)\,dx = \frac{\alpha^3}{12}(4l-3\alpha),$$

et le premier terme du second membre est, par suite,

$$\frac{P\alpha^3(l-\alpha)(4l-3\alpha)}{12l}.$$

Le second s'obtient en changeant, dans le précédent, α en $l-\alpha$, ce qui donne

$$\frac{P}{12l}(l-\alpha)^3\alpha(l+3\alpha).$$

Par suite,

$$\int_0^l M_s x(l-x)\,dx = \frac{P\alpha(l-\alpha)(l^2+l\alpha-\alpha^2)}{12}, \tag{18}$$

et par la formule (15),

$$q = \frac{5P}{l}\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\left(1+\frac{\alpha}{l}-\frac{\alpha^2}{l^2}\right). \tag{19}$$

Selon la règle de Rankine, ce serait $\frac{P}{l}$, quel que soit α ou quelle que soit la position de la charge. Nous trouvons, comme cela doit être, que q varie avec cette position.

Si la charge est au milieu, $\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{2}$;

$$(20) \qquad q = \frac{25}{16} P.$$

Cette valeur de q est environ une fois et demie celle $\frac{P}{l}$ que donnerait la règle de Rankine, tandis que, si α est voisin de zéro ou de l, c'est-à-dire si le poids P est près d'un appui, nous trouvons q beaucoup plus faible que Rankine.

Le moment de flexion véritable en un point de la poutre est

$$M = M_s - qm,$$

ou

$$(21) \qquad M = M_s - \frac{qx(l-x)}{2},$$

soit, pour $x < \alpha$,

$$(22) \qquad M = \frac{P(l-\alpha)}{l} x - \frac{qx(l-x)}{2}$$

et, pour $x > \alpha$,

$$(22\ bis) \qquad M = \frac{P\alpha}{l}(l-x) - \frac{qx(l-x)}{2}.$$

Si la charge est au milieu, on a, sur la première moitié de la poutre,

$$M = \frac{Px}{2} - \frac{25}{32}\frac{P}{l}x(l-x)$$

ou

$$(23) \qquad M = \frac{Px}{2}\left[1 - \frac{25}{16}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] = \frac{Px}{32}\left(25\frac{x}{l} - 9\right).$$

et, sur la seconde moitié, les valeurs de M s'obtiennent en changeant dans les précédentes x en $\frac{l}{2} - x$.

On voit que le moment de flexion change de signe pour

$$x = \frac{9}{25} l = 0,36\, l,$$

soit à un peu plus du tiers de la longueur de la poutre à partir de chacune de ses extrémités.

En ces points, la fibre moyenne présente des inflexions.

Entre chaque extrémité et le point d'inflexion, il y a un mini-

mum pour

$$x = \frac{9}{30} l,$$

ayant pour valeur

$$M = -\frac{81}{3200} P l = 0,025 P l.$$

Depuis le point d'inflexion jusqu'au milieu de la poutre, le moment de flexion est positif et il atteint au milieu son maximum

$$(24) \qquad M \max = \frac{7}{128} P l,$$

tandis que si la poutre n'était pas reliée à l'arc, ce moment maximum serait

$$\frac{P l}{4} = \frac{32}{128} P l,$$

soit environ 4,5 fois plus grand.

§ 523.

ACTION D'UN POIDS VOYAGEUR SUR UNE SECTION DONNÉE. — D'après les formules (19), (22) et (22 *bis*), le moment de flexion produit dans une section donnée d'abscisse x par un poids P dont la position est définie par l'abscisse α est :

1° Si le poids est à gauche de la section, c'est-à-dire pour $x > \alpha$,

$$(a) \qquad M = \frac{P\alpha(l-x)}{l}\left\{1 - \frac{5x}{2l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\left[1+\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\right]\right\};$$

2° Si le poids est à droite de la section, soit pour $x < \alpha$,

$$(b) \qquad M = \frac{P(l-\alpha)x}{l}\left\{1 - \frac{5}{2}\,\frac{l-x}{l}\,\frac{\alpha}{l}\left[1-\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\right]\right\};$$

3° Si le poids est dans la section même, soit pour $x = \alpha$,

$$(c) \qquad M = \frac{Px(l-x)}{l}\left\{1 - \frac{5}{2}\,\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[1+\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]\right\}$$

ou, en posant, pour abréger,

$$(d) \qquad \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) = Z,$$

$$(d') \qquad M = P l Z[1 - \tfrac{5}{2} Z(1+Z)].$$

Si dans les formules (a) et (b) on laisse x constant et qu'on fasse varier α, on se rendra compte de l'influence que le poids P produit *sur une section donnée de la poutre* pendant qu'il parcourt le pont.

Pour discuter ces formules, le plus simple est de se servir d'un artifice analogue à celui qui, dans la théorie des arcs, nous a conduit à la considération de la *ligne de poussée*.

A cet effet, multiplions les formules (a) et (b) par le produit

$$\frac{4f}{\mathrm{P}x(l-x)},$$

qui, pour une section donnée d'abscisse x, est *un paramètre constant*. On obtient, en appelant

$$\beta = 4f\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)$$

l'ordonnée de la parabole qui forme le câble répondant à une abscisse α,

$$(a_1)\qquad \frac{4f\mathrm{M}}{\mathrm{P}x(l-x)} = \frac{4f\alpha}{lx} - \frac{5}{2}\frac{\beta}{l}\left(1+\frac{\beta}{4f}\right)$$

et

$$(b_1)\qquad \frac{4f\mathrm{M}}{\mathrm{P}x(l-x)} = \frac{4f(l-\alpha)}{l(l-x)} - \frac{5}{2}\frac{\beta}{l}\left(1+\frac{\beta}{4f}\right).$$

Les derniers termes de ces deux équations sont les mêmes et ne contiennent pas le *paramètre x*. Donc ils restent les mêmes pour toutes les sections sur lesquelles on veut étudier l'influence du poids mobile. Construisons *une fois pour toutes* la courbe ayant pour abscisses α et pour ordonnée ce second terme, soit

$$\frac{5}{2}\frac{\beta}{l}\left(1+\frac{\beta}{4f}\right).$$

C'est une sorte de parabole passant par les appuis a et b de la poutre et symétrique par rapport à son milieu O (*fig.* 65, p. 251).

En ce point on a $\beta = f$. L'ordonnée est donc

$$\frac{5}{2}\frac{5}{4}\frac{f}{l} = \frac{25}{8}\frac{f}{l}.$$

Convenons de prendre $\frac{f}{l}$ pour unité et de représenter ce rapport

par une longueur donnée, par exemple par $0^m,01$, en sorte que l'ordonnée OO′ de la courbe cherchée est $\frac{25}{8}$ de centimètre.

La tangente à l'origine a a pour coefficient angulaire

$$\frac{5}{2}\frac{4f}{l^2} = 10\frac{f}{l^2}.$$

Son équation est donc

$$y = 10\frac{f}{l^2}x.$$

Pour $x = \frac{l}{2}$,

$$y = 5\frac{f}{l},$$

soit $0^m,05$.

Fig. 66.

On obtient donc facilement cette courbe $aO'b$. C'est celle que nous appelons la *ligne de poussée,* parce que chacune de ses ordonnées représente, à un facteur près, la tension q produite dans les tiges de suspension et, par suite aussi, la poussée Q produite dans l'arc par le poids voyageur à l'instant où il est dirigé suivant cette ordonnée.

Construisons à présent pour l'équation (a_1) la droite dont l'ordonnée est

$$\frac{4f\alpha}{lx}.$$

Elle passe par l'origine et, pour $\alpha = x$, son ordonnée est

$$\frac{4f}{l}.$$

De même, pour l'équation (b_1), la droite dont l'ordonnée est

$$\frac{4f}{l}\frac{l-\alpha}{l-x}$$

passe par le point b et, pour $\alpha = x$, son ordonnée est aussi $\frac{4f}{l}$.

Menons donc *une fois pour toutes* l'horizontale kk' dont l'ordonnée est $\frac{4f}{l}$, soit $0^m,04$. On voit qu'elle passe un peu au-dessus du sommet O' de la courbe $aO'b$.

Je dis qu'ayant tracé la courbe $aO'b$ et l'horizontale kk', nous pouvons étudier l'influence d'un poids mobile (et, par suite, celle d'un convoi mobile) sur chaque section de la poutre.

Il suffit de s'occuper des sections placées d'un côté du milieu, par exemple, à gauche, les choses se passant symétriquement pour celles de droite.

Il y a deux cas à considérer suivant que la section est à gauche ou à droite du point i où la tangente en a à la ligne de poussée coupe la droite kk'.

Soit d'abord une section X à gauche de i. Elle coupe la ligne de poussée et la droite kk' en x et x'. Joignons ce dernier point aux extrémités a et b de la poutre. On voit qu'à l'échelle adoptée les premiers membres des équations (a_1) et (b_1) sont représentés par les portions d'ordonnées comprises entre la ligne de poussée et le contour brisé $ax'b$.

Chacune de ces coordonnées est donc proportionnelle au moment de flexion M que le poids voyageur P détermine dans la section X lorsqu'il est placé suivant cette ordonnée.

De là je conclus que, quand le poids P parcourt la poutre en cheminant de a vers b, le moment de flexion qu'il détermine dans la section X est positif tant que ce poids est à gauche de la section; il va en croissant à mesure que le poids voyageur s'approche de la section, passe par un maximum que j'appellerai son *maximum positif*, lorsqu'il se trouve dans la section, décroît ensuite en s'en éloignant vers la droite jusqu'à devenir nul quand le poids

est sur la verticale du point s où la droite $x'b$ coupe la ligne de poussée; puis il devient négatif, croît de nouveau *en valeur absolue* jusqu'à un maximum que j'appelle son *maximum négatif* qui répond à la position yy' du poids pour laquelle la tangente à la ligne de poussée est parallèle à $x'b$, puis va de nouveau en décroissant jusqu'à zéro.

Donc il y a deux positions du poids défavorables à la section : 1° *celle où le poids est dans la section même;* 2° *celle où il occupe la position yy'.*

Supposons à présent la section considérée en X_1, à droite de i. Soit x'_1 son point d'intersection avec kk'. Joignons x'_1a et x'_1b; les moments de flexion que le poids détermine dans la section sont proportionnels aux portions d'ordonnées comprises entre la ligne de poussée et le contour ax'_1b. On voit que cette fois ce contour coupe la ligne de poussée en deux points σ et σ'. Le poids mobile détermine un moment de flexion d'abord négatif passant, en valeur absolue, par un maximum au point où la tangente à la ligne de poussée est parallèle à la droite ax'_1; à partir de là, il va *décroissant en valeur absolue à mesure que le mobile s'approche de la section;* il s'annule une première fois en σ, puis devient positif et croît jusqu'au maximum positif $x_1x'_1$ qu'il atteint dans la section. Il va ensuite décroissant jusqu'à s'annuler en σ', puis devient négatif, *croît de nouveau en valeur absolue* à mesure que le mobile *s'éloigne* de la section jusqu'à passer par un nouveau maximum négatif, puis décroît de nouveau jusqu'à zéro.

§ 524.

Résumé. — La position du point i est facile à trouver.

L'équation de la tangente ai est

$$y = 10\frac{f}{l^2}x;$$

celle de l'horizontale kk'

$$y = 4\frac{f}{l},$$

Donc l'abscisse de leur point d'intersection est donnée par

$$4\frac{f}{l} = 10\frac{f}{l^2}x$$

ou

$$x = \tfrac{2}{5}l;$$

d'où

$$\frac{l}{2} - x = \frac{l}{10}.$$

Donc :

1° Pour toute section placée à plus de $\frac{l}{10}$ du milieu de la poutre, le moment de flexion dû à un poids mobile atteint un maximum positif dans la section et un maximum négatif dans la moitié de la poutre opposée à celle qui renferme la section.

Soient $\zeta \max = xx'$ et $\zeta' \max = yy'$ les ordonnées mesurées à l'échelle indiquée qui répondent à ces positions et M max, M′ max les maxima positif et négatif du moment de flexion.

On a

$$\text{M} \max = \frac{\text{P}x(l-x)}{4f}\zeta \max,$$

$$\text{M}' \max = \frac{\text{P}x(l-x)}{4f}\zeta' \max$$

ou

$$\text{M} \max = \frac{\text{P}l^2 z}{16f^2}\zeta \max,$$

$$\text{M}' \max = \frac{\text{P}l^2 z}{16f^2}\zeta' \max,$$

z étant l'ordonnée de la parabole formant le câble, qui répond à la section considérée.

2° Pour des sections placées à moins de $\frac{l}{10}$ du milieu, il se produit un maximum positif dans la section et deux maxima négatifs en dehors. Ils se trouvent de la même manière.

Pour un convoi, la discussion serait analogue, à l'aide des principes développés dans la IIe Partie de cet Ouvrage, au Chapitre II, relatif aux lignes d'influence § 307.

§ 525.

MOMENT MAXIMUM POSITIF DU A UN POIDS VOYAGEUR. MAXIMUM MAXIMORUM. — En général, il suffit de connaître le maximum positif,

c'est-à-dire, quelle que soit la position de la section, celui qui se produit quand le poids est placé dans la section même. On peut l'obtenir directement par les formules (d) et (d').

Examinons comment varie ce maximum d'une section à l'autre. La dérivée de M est

$$\frac{dM}{dZ} = Pl(1 - 5Z - \tfrac{15}{2}Z^2);$$

elle s'annule pour

$$Z = \frac{-5 + \sqrt{55}}{15} = \frac{2,416}{15} = 0,1611$$

ou

$$\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = 0,1611.$$

Soit x' la distance du point cherché au milieu de la poutre, en sorte que

$$x = \frac{l}{2} + x', \qquad \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{1}{4} - \frac{x'^2}{l^2};$$

par suite,

$$\frac{x'^2}{l^2} = 0,25 - 0,1611 = 0,0389;$$

d'où

$$\frac{x'}{l} = \pm 0,19723,$$

soit environ

$$x' = \pm \frac{l}{5};$$

d'où je conclus que *le moment* maximum maximorum *produit dans une poutre à deux appuis reliée par un câble, par une charge roulante, ne se produit pas quand celle-ci passe au milieu de la poutre, mais quand elle passe dans l'une des deux sections situées à environ $\frac{1}{5}$ de la longueur de la poutre à partir de son milieu.* Sa valeur est environ

(d) $$M = 0,085\,Pl$$

ou, approximativement,

(d') $$M = \tfrac{1}{12}\,Pl.$$

Lorsque la charge passe dans la section du milieu, ce qui donne

$Z = \frac{1}{4}$, le moment maximum qu'elle produit est seulement

$$M = \frac{7}{4 \times 32} P l = 0{,}054\, P l.$$

Le moment *maximum maximorum* qu'un poids produirait sur la poutre non reliée à l'arc serait, comme on sait,

$$M = \frac{P l}{4} = 0{,}25\, P l,$$

soit environ le triple de celle (d). Nous pouvons donc encore dire :

Le moment de flexion le plus grand qu'un poids voyageur puisse produire sur une poutre à deux appuis simples reliée par un câble est environ le tiers de celui qu'elle produirait sur la même poutre détachée du câble, et ce moment se produit au passage du poids dans chacune des deux sections éloignées du milieu de la poutre d'environ $\frac{1}{5}$ de sa longueur.

§ 526.

SURCHARGE FIXE LA PLUS DÉFAVORABLE A UNE SECTION. — Supposons à présent qu'on cherche non plus l'influence d'une surcharge mobile sur une section donnée, mais celle d'une surcharge fixe, par exemple, uniformément répartie, mais sur tout *ou partie* de la poutre. On demande quelles sont les portions de la poutre qu'il faut surcharger pour produire le moment maximum dans une section donnée. Il résulte facilement de la discussion qui précède et du principe de superposition des effets élastiques.

1° Que s'il s'agit d'une section X placée à plus de $\frac{l}{10}$ de son point milieu, on y produira le moment maximum positif, en surchargeant toute la partie de la poutre placée à gauche de la verticale de s (*fig.* 66, p. 252), c'est-à-dire toute celle qui fournit dans la section X des moments positifs, et le maximum négatif en surchargeant au contraire le reste de la poutre ;

2° S'il s'agit d'une section X_1 placée à moins de $\frac{l}{10}$ du milieu de la poutre, on obtient le maximum positif en surchargeant la

partie de la poutre comprise entre les points σ et σ', et le maximum négatif en surchargeant, au contraire, le reste de la poutre.

S'il s'agit de la section du milieu, nous avons vu que les points σ et σ' divisent à peu près la poutre en trois parties égales. Le maximum positif s'obtiendrait donc en surchargeant environ le tiers moyen, et le maximum négatif en surchargeant les tiers extrêmes de la poutre.

S'il s'agit d'une surcharge uniforme, nous avons vu que, si la poutre entière est surchargée, elle n'éprouve aucun moment de flexion. La surcharge est reportée tout entière sur le câble. De là et du principe de superposition déjà invoqué résulte que les *maxima positif et négatif* dont il s'agit ici sont égaux, au signe près, de sorte qu'il n'est utile, en tout état de cause, que de considérer l'un d'eux. Il n'en serait pas de même s'il s'agissait de surcharges fixes non uniformes.

§ 527.

ACTION D'UN POIDS VOYAGEUR SUR LE CABLE ET LES TIGES DE SUSPENSION. — Le maximum de q a lieu, d'après la formule (19) du § 522, pour la valeur maxima de

$$\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right),$$

qui a lieu quand le poids est au milieu. On a alors

$$q = \frac{25}{16}\,\frac{P}{l}.$$

Quand même P est très grand, cela fait une très faible tension sur chaque tige et, par suite, aussi sur le câble.

§ 528.

SURCHARGES DIVERSES. — Surcharges en nombre quelconque. — S'il y a des surcharges en nombre quelconque, pour avoir la tension q qu'elles déterminent dans les barres de suspension, il suffit d'ajouter celles que détermine chacune d'elles prise isolément; d'où,

par la formule (19),

$$(25)\qquad q = \frac{5}{l}\sum_{0}^{l} P\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\left(1+\frac{\alpha}{l}-\frac{\alpha^2}{l^2}\right),$$

la somme s'étendant à tous les poids P d'abscisses α qui forment la surcharge.

Surcharges continues. — Si en chaque élément $d\alpha$ il y a une surcharge $p_s\, d\alpha$, p_s étant une fonction quelconque de α, on aura

$$(26)\qquad q = \frac{5}{l}\int_0^l \frac{p_s\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\left(1+\frac{\alpha}{l}-\frac{\alpha^2}{l^2}\right)d\alpha.$$

Surcharge uniforme sur une moitié du point. — Supposons p_s constant et régnant sur une moitié seulement du pont. On aura

$$q = \frac{p_s}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\left(1+\frac{\alpha}{l}-\frac{\alpha^2}{l^2}\right)d\alpha.$$

Soient

$$\alpha = l\alpha', \qquad d\alpha = l\, d\alpha';$$

d'où

$$q = 5p_s\int_0^{\frac{1}{2}} \alpha'(1-\alpha')(1+\alpha'-\alpha'^2)\, d\alpha'$$

ou

$$(27)\qquad q' = \tfrac{5}{10}p_s = \tfrac{1}{2}p_s,$$

ce qui est conforme à la règle de Rankine, car cela revient à ré pandre sur la longueur totale l du pont la charge totale $p_s\,\frac{l}{2}$.

§ 529.

COMPARAISON AVEC LA RÈGLE DE RANKINE. — Pour une charge unique, nous trouvons q beaucoup plus faible que ce que donne la règle de Rankine ou plus fort suivant que la charge est plus ou moins éloignée des appuis. Quand elle est au milieu de la poutre, nous trouvons

$$(28)\qquad q = \frac{25}{16}\,\frac{P}{l},$$

au lieu de

$$q = \frac{P}{l},$$

donnée par Rankine.

Pour une charge uniforme sur la totalité ou sur une moitié de la poutre, nos résultats s'accordent avec la règle proposée par Rankine. Pour d'autres charges uniformes, la règle de Rankine cesserait d'être applicable, surtout dans le voisinage des culées.

§ 530.

EFFETS D'UNE DILATATION OU D'UNE CONTRACTION DU CABLE SUR LA POUTRE. — Si la température vient à croître de la quantité positive ou négative représentée par τ° C., la valeur correspondante de q est (§ 532)

$$q = -\frac{15\,\mathrm{EI}\,\delta\tau}{fl^2},$$

et le moment de flexion correspondant est

$$\mathrm{M} = \frac{q}{2}x(l-x) = -\frac{15\,\mathrm{EI}\,\delta\tau}{2fl^2}x(l-x).$$

La tension maxima R aux fibres extrêmes d'une section d'abscisses x sera la valeur absolue de $\frac{\mathrm{M}h}{2\mathrm{I}}$, en sorte que

$$\mathrm{R} = \frac{15}{4}\frac{h}{f}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\mathrm{E}\,\delta\tau.$$

Le maximum de R a lieu au milieu de la poutre, soit, pour $x = \frac{l}{2}$,

$$\mathrm{R\,max} = \frac{15}{16}\frac{h}{f}\mathrm{E}\,\delta\tau.$$

Supposons $\frac{h}{f} = \frac{1}{10}$,

$$\mathrm{E} = 2\times10^{10}, \qquad \delta = \frac{10^{-4}}{7}\,\tau = 32^\circ.$$

On aura

$$\mathrm{R\,max} = \frac{6}{7}\times10^6,$$

c'est-à-dire que le fer ne travaillera du fait d'un changement de empérature de 32° qu'à $\frac{6}{7}$ de kilogramme par millimètre carré.

Suivant que la température sera celle de la pose, augmentée ou diminuée de 32°, ce sont les fibres inférieures ou celles supérieures qui seront tendues à $\frac{6}{7}$ de kilogramme et les autres comprimées. Le résultat qui précède s'applique donc à un écart de température de 64°.

Il y a toutefois à ce sujet une objection à lever. Ce résultat suppose, en effet, que les tiges de suspension restent constamment tendues, que τ soit positif ou négatif. Or l'expression ci-dessus de q montre que l'accroissement de tension q de ces tiges est négatif si τ est positif. Or, pour $\tau = 0$, la tension des tiges est égale à la charge permanente p_0. Si la température vient à s'élever, cette tension devient

$$p_0 + q = p_0 - \frac{15 \mathrm{EI}\, \delta\tau}{fl^2}.$$

Pour qu'il y ait tension, il faut donc que

$$p_0 - \frac{15 \mathrm{EI}\, \delta\tau}{fl^2} > 0$$

ou

$$\mathrm{I} < \frac{1}{15} \frac{fl^2 p_0}{\mathrm{E}\, \delta\tau}.$$

Ainsi, supposons un arc de 100^{m} d'ouverture et de 10^{m} de flèche relié à une poutre en fer, en sorte que $fl^2 = 10^5$. Pour $\tau = 32°$ et $\mathrm{E} = 2 \times 10^{10}$, $\delta = \frac{10^{-4}}{7}$, on doit avoir

$$\mathrm{I} < \frac{1}{15} \frac{10^5 \times 7 \times 10^4}{2 \times 10^{10} \times 32} p_0$$

ou

$$\mathrm{I} < \frac{7 p_0}{9600}.$$

Au pont de Lamothe, qui répond à peu près aux données admises, la charge permanente pour chaque ferme est d'environ

$$p_0 = 800^{\mathrm{kg}},$$

de sorte que l'inégalité devient

$$\mathrm{I} < \frac{7}{12},$$

et ne saurait être douteuse.

§ 531.

RÉSUMÉ ET RÈGLES PRATIQUES. — 1° Il résulte de tout ce qui précède que plus une surcharge se rapproche de l'uniformité, moins elle fatigue la poutre et plus elle fatigue le câble et les tiges de suspension, et *vice versa*. Il faut donc déterminer la poutre de façon qu'elle résiste aux plus fortes charges isolées et le câble et les tiges de façon qu'elles résistent aux plus fortes charges uniformes.

2° Pour la poutre, il convient de lui donner un moment d'inertie qui soit environ le tiers de celui qu'on lui donnerait si elle n'était pas reliée au câble.

Si l'on veut que le pont livre passage à des véhicules à un essieu de 11 tonnes ou à deux essieux de 16 tonnes, ce qui ferait, avec le poids des chevaux, environ 13 tonnes dans le premier cas et 19 à 20 dans le second, on déterminera le moment de flexion M_s que la plus forte de ces charges produirait au milieu de la poutre si celle-ci était détachée du câble; on en prendra le tiers et l'on calculera le moment d'inertie à donner à la section d'après le résultat obtenu.

Si l est la portée, on aurait

$$M_s = \frac{Pl}{4}.$$

On prendra

$$M = \frac{Pl}{12}$$

et

$$I = \frac{Mh}{2R} = \frac{Plh}{24R}.$$

Toutefois, si l'on veut arriver à la plus grande économie possible de matière et constituer la poutre en solide d'égale résistance, on devra envisager un certain nombre de sections et leur donner le moment d'inertie voulu pour qu'elles résistent à la plus grande fatigue qu'elles puissent éprouver de la part de charges fixes ou mobiles (§§ 523, 524, 525).

3° Pour le câble et les tiges, il faut considérer le poids permanent p_0 et la surcharge uniforme réglementaire.

Toutefois, si l'on accepte qu'une file de voitures de 16 tonnes pesant 20 tonnes, chevaux compris, puisse passer sur le pont, en

admettant que chaque véhicule avec son attelage tienne une longueur de 20^m, cela suppose 1 tonne par mètre courant de pont, soit 500^{kg} par mètre courant de ferme.

Donc, si les prescriptions réglementaires permettaient une surcharge de moins de 500^{kg}, il conviendrait de prendre néanmoins cette dernière.

Dans ces conditions, on déterminera la section du câble suivant les formules ordinaires.

4° Quant aux tiges de suspension, il paraît très exagéré, si l'on admet des véhicules à un essieu de 11 tonnes, de les calculer de façon que chacune puisse porter la moitié d'une telle charge, puisque les charges isolées, comme nous l'avons vu, se répartiront théoriquement entre toutes les tiges et pratiquement entre un grand nombre d'entre elles.

Nous croyons que si, dans le calcul des tiges, on admet une charge uniforme double de celle admise dans le calcul des câbles, et qu'en outre on les fasse travailler seulement au tiers de la tension maxima admise pour les câbles, on aura toute sécurité.

CHAPITRE IX.

APPLICATION AU CAS OU IL Y A DES HAUBANS.

A. TRAVÉE CENTRALE.

§ 532.

INDICATION SOMMAIRE D'UNE MÉTHODE EXACTE; MÉTHODE APPROCHÉE. — S'il y a n haubans, on pourrait résoudre le problème rigoureusement à l'aide de la théorie des poutres à travées solidaires. On déterminerait le moment M_s dû à la surcharge en regardant la poutre comme détachée du câble et en supposant les appuis, c'est-à-dire les points d'attache des haubans, fixes; on déterminerait dans les mêmes conditions le moment de flexion m dû à une charge uniforme de 1^{kg} par mètre. On en conclurait (§ 521)

$$q = \frac{\int_0^{l_0} M_s x\, dx}{\int_0^{l_0} m\, z\, dx}.$$

l_0 étant la longueur de la travée centrale ou la longueur totale de la poutre suivant que l'une ou l'autre porte des tiges. On aurait, par suite, le moment de flexion vrai

$$M = M_s - qm.$$

On en déduirait les réactions N_i sur les appuis ou points d'attache des haubans (§ 395).

Or, si r_i est la longueur du hauban aboutissant au point d'attache caractérisé par l'indice i, si β_i est son inclinaison sur la verticale et si l'on désigne enfin par H la hauteur au-dessus de la fibre moyenne, du sommet de la pile où sont attachés tous les

haubans, la tension du câble sera

$$\frac{N_i}{\cos\beta_i}.$$

Si l'on veut qu'il travaille à la tension maxima R par unité de surface, on cherchera la valeur de N_i max répondant aux combinaisons de charges les plus défavorables et l'on calculera la section S_i du hauban par la formule

$$S_i = \frac{N_i \max}{R\cos\beta_i}.$$

Si l'on ne veut pas se contenter de cette première approximation obtenue en regardant, contrairement à la réalité, les points d'attache comme fixes, on observera que, sous une charge particulière, donnant la réaction N_i et, par suite, la tension par unité de surface

$$\frac{N_i}{S_i\cos\beta_i},$$

l'allongement du hauban, E_0 étant son coefficient d'élasticité, sera

$$\frac{N_i r_i}{E_0 S_i \cos\beta_i}$$

et l'abaissement vertical de son point d'attache

$$y_i = \frac{N_i r_i}{E_0 S_i \cos^2\beta_i} = \frac{N_i r_i^3}{E_0 S_i H^2}.$$

On pourra alors chercher les moments de flexion dus à ces abaissements qu'on avait d'abord négligés et faire ainsi un calcul de seconde approximation.

Mais, en réalité et pratiquement, la travée centrale peut être considérée comme encastrée à ses extrémités.

Si on la regarde comme simplement appuyée, et qu'on lui donne partout le moment d'inertie correspondant à la section la plus fatiguée en se conformant aux règles exposées aux paragraphes précédents, on sera également certain de sa résistance.

Si l'on veut la regarder comme encastrée, la marche à suivre sera celle-ci.

Supposons-la soumise à des surcharges en nombre quelconque.

Soit P l'une des charges, α son abscisse comptée depuis l'extrémité gauche de la travée centrale.

Le moment de flexion M_s dû à une charge isolée est :

1° Pour $x < \alpha$ (charge à droite de la section considérée) :

$$(1) \qquad M_s = \frac{P(l_0 - \alpha)^2}{l_0^3}[(l_0 + 2\alpha)x - l_0\alpha] \; (^1);$$

2° Pour $x > \alpha$ (charge à gauche de la section considérée) :

$$(1') \qquad M_s = \frac{P\alpha^2}{l_0^3}[(3l_0 - 2\alpha)(l_0 - x) - l_0(l_0 - \alpha)].$$

De là on tire

$$\int_0^\alpha M_s x(l_0 - x)\,dx = \frac{P(l_0 - \alpha)^2}{l_0^3}\int_0^\alpha [(l_0 + 2\alpha)x - l_0\alpha]x(l_0 - x)\,dx$$
$$= \frac{P(l_0 - \alpha)^2\alpha^2}{l_0^3}\left[-\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{3}{4}l_0\alpha^2 - \frac{1}{6}l_0^2\alpha\right].$$

On obtient $\int_\alpha^{l_0} M_s x(l_0 - x)\,dx$ en changeant dans cette expression α en $l_0 - \alpha$, ce qui donne

$$\frac{P(l_0 - \alpha)^2\alpha^2}{l_0^3}\left[-\frac{1}{2}(l_0 - \alpha)^3 + \frac{3}{4}l_0(l_0 - \alpha)^2 - \frac{1}{6}l_0^2 - \alpha)\right].$$

Ajoutant les deux expressions, on aura

$$(2) \qquad \int_0^{l_0} M_s x(l_0 - x)\,dx = \frac{P\alpha^2(l_0 - \alpha)^2}{12}.$$

En faisant $P = d\alpha$ et intégrant de o à α, on a

$$(3) \qquad \int_0^\alpha m x(l_0 - x)\,dx = \frac{12 \times 30}{l_0^5} = \frac{l_0^5}{360},$$

ce qu'on déduirait aussi de l'expression

$$(4) \qquad m = -\frac{l_0^2}{12} + \frac{1}{2}x(l_0 - x),$$

qui répond aux poutres encastrées.

---

(1) Voir notre *Statique graphique*, IIe Partie, p. 119.

Par suite,

(5) $$q = \frac{\int_0^{l_0} M_s x(l_0 - x)\,dx}{\int_0^{l_0} m x(l_0 - x)\,dx} = \frac{360}{l_0^5}\int_0^{l_0} M_s x(l_0 - x)\,dx.$$

Pour une charge isolée,

(6) $$q = \frac{30 P \alpha^2 (l_0 - \alpha)^2}{l_0^5}.$$

Si la charge est au milieu de la poutre, $\alpha = \frac{1}{2} l_0$

(6) $$\frac{30}{16}\frac{P}{l} = \frac{15}{8}\frac{P}{l},$$

qui est presque le double de la valeur qui donnerait la règle de Rankine.

Par superposition, on obtient q, quelles que soient les charges,

(8) $$q = \frac{30}{l_0^5}\sum P \alpha^2 (l_0 - \alpha)^2,$$

et le moment de flexion

(9) $$M = M_s - qm.$$

On a, s'il y a plusieurs charges, d'après les formules (1) et (1'),

(10) $$\left\{\begin{aligned} M_s = &\sum_0^x \frac{P\alpha^2}{l_0^3}[(3l_0 - 2\alpha)(l_0 - x) - l_0(l_0 - \alpha)] \\ &+ \sum_x^l \frac{P(l_0 - \alpha)^2}{l_0^3}[(l_0 + 2\alpha)x - l_0\alpha]. \end{aligned}\right.$$

§ 533.

ACTION PRODUITE PAR UN POIDS VOYAGEUR. — Les formules (1), (1'), (6) et (9) donnent pour le moment de flexion produit dans la section d'abscisse x par un poids voyageur P à l'instant où son abscisse est α :

1° Pour $x > \alpha$, c'est-à-dire si le poids est à gauche de la section :

$$(a) \quad \begin{cases} M = \frac{P\alpha^2}{l_0^3}[(3l_0 - 2\alpha)(l_0 - x) - l_0(l_0 - \alpha)] \\ \quad - \frac{30P\alpha^2(l_0-\alpha)^2}{l_0^3}\left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right]; \end{cases}$$

2° Pour $x < \alpha$, c'est-à-dire si le poids est à droite de la section :

$$(a_1) \quad \begin{cases} M = \frac{P(l_0-\alpha)^2}{l_0^3}[(l_0 + 2\alpha)x - l_0\alpha] \\ \quad - \frac{30P\alpha^2(l_0-\alpha)^2}{l_0^3}\left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right]; \end{cases}$$

3° Pour $x = \alpha$, si le poids est dans la section même,

$$(b) \qquad M = \frac{Px^2(l_0-x)^2\left[\frac{9}{2} - 15\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right]}{l_0^3}.$$

L'ordonnée de la parabole formant le câble a, pour expression,

$$z = 4f\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right).$$

Posons

$$z' = z - \frac{2f}{3},$$

en sorte que z' représente l'ordonnée *positive* ou *négative* du câble comptée depuis l'horizontale passant aux $\frac{2}{3}$ de la flèche à partir de son pied.

Je multiplie les deux membres des équations (a), (a_1), (b) par $\frac{8f}{Pz'l_0}$, il viendra

1° Pour $x < \alpha$,

$$(a_1) \quad \frac{8fM}{Pz'l_0} = \left(\frac{\alpha}{l_0}\right)^2\left[\left(3 - 2\frac{\alpha}{l_0}\right)\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) - \left(1 - \frac{\alpha}{l_0}\right)\right]\frac{8f}{z'} - 30\left(\frac{\alpha}{l_0}\right)^2\left(1 - \frac{\alpha}{l_0}\right)^2.$$

2° Pour $\alpha > x$,

$$(a'_1) \quad \frac{8fM}{Pz'l_0} = \left(1 - \frac{\alpha}{l_0}\right)^2\left[\left(1 + \frac{2\alpha}{l_0}\right)\frac{x}{l_0} - \frac{\alpha}{l_0}\right]\frac{8f}{z'} - 30\left(\frac{\alpha}{l_0}\right)^2\left(1 - \frac{\alpha}{l_0}\right)^2.$$

3° Pour $x = \alpha$,

$$(b') \qquad \frac{8fM}{Pz'l_0} = \left(\frac{16f}{z'} - 30\right)\left(\frac{x}{l_0}\right)^2\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2.$$

Je construis *une fois pour toutes* la courbe qui a pour ordonnée

$$30\left(\frac{\alpha}{l_0}\right)^2\left(1 - \frac{\alpha}{l_0}\right)^2.$$

Elle est symétrique par rapport au milieu de la poutre, tangente à la fibre moyenne fg (*fig.* 67, p. 270) en ses extrémités f et g. Son ordonnée du milieu OO′ est

$$30 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}.$$

Prenons deux centimètres pour représenter l'unité, en sorte que OO′ est

$$2 \times \frac{15}{8} = \frac{15}{4} \text{ centimètres.}$$

Les points d'inflexion j et j' ont pour abscisses

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right),$$

soit

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{l} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} = \pm \frac{1,732}{6} = \pm 0,288,$$

c'est-à-dire qu'ils sont à 0,288 l de part et d'autre du milieu ou à un peu plus du quart de la longueur de la travée à partir de son milieu. Les ordonnées correspondantes $j_1 j$, $j'_1 j'$ sont : $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Cette ligne n'est autre que *la ligne de poussée*.

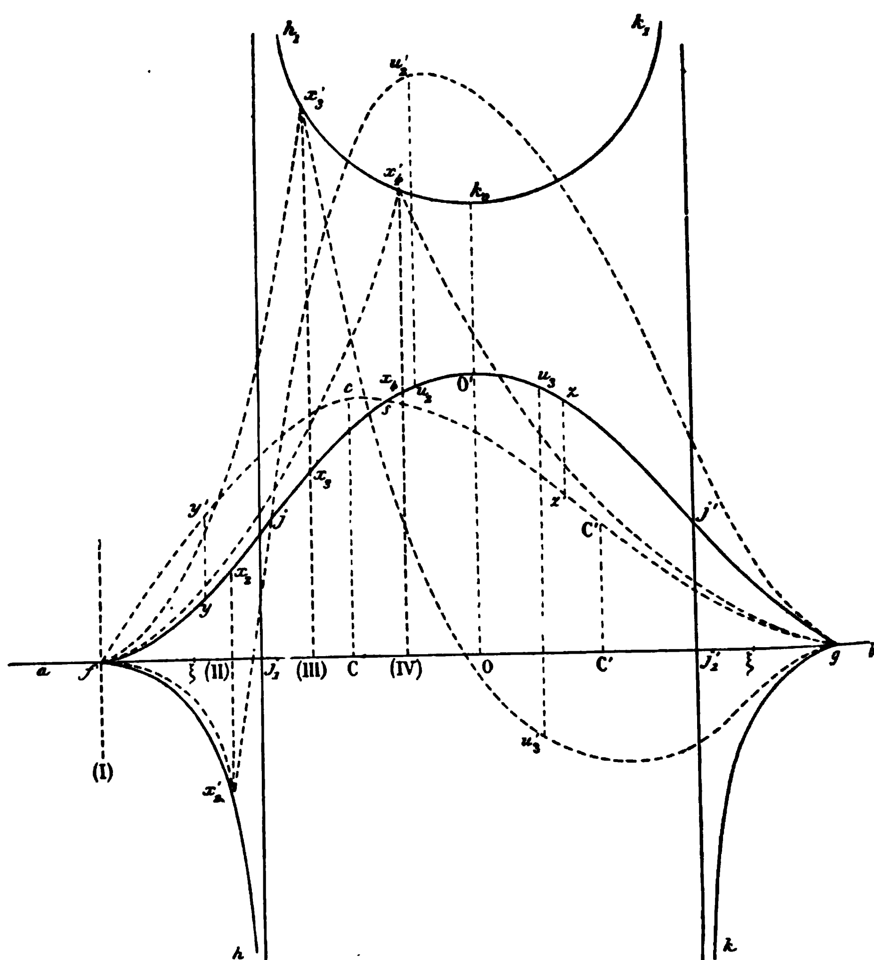
Je construis à présent les courbes dont les ordonnées sont les premiers termes des seconds membres de (a') et (a'_1), les abscisses étant α. Pour chaque section d'abscisse x, la première est à construire pour les abscisses α allant de o à x et la seconde, au contraire, pour les abscisses allant de x à l_0. Pour $\alpha = x$, les deux courbes ont même ordonnée, à savoir

$$Z = \frac{16f}{z'}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2$$

ou

$$Z = \frac{16\left(\frac{x}{l_0}\right)^2\left(1-\frac{x}{l_0}\right)^2}{4\frac{x}{l_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right)-\frac{2}{3}}.$$

Fig. 67.



Construisons d'abord cette courbe, c'est l'analogue de l'horizontale kk' qui a servi (§ 523) dans la poutre à deux appuis simples. Elle est symétrique par rapport au milieu de la poutre, tangente

à la fibre moyenne fg aux extrémités f et g de la travée centrale.

Elle admet les deux asymptotes verticales définies par

$$4\frac{x}{l_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right)=\frac{2}{3}$$

ou

$$\left(\frac{x}{l_0}\right)^2-\frac{x}{l_0}+\frac{1}{6}=0, \qquad \frac{x}{l_0}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ce sont précisément celles qui correspondent aux points d'inflexion j et j' de la ligne de poussée.

Elle se composera donc des deux branches fh et gk, pour lesquelles les ordonnées sont de signe contraire à celles de la ligne de poussée et qui sont, pour cette raison, placées au-dessous de fg, la ligne de poussée ayant été placée au-dessus; et d'une branche supérieure $h_1 k_0 k_1$.

L'ordonnée $\mathrm{O}k_0$, qui répond à $\frac{x}{l_0}=\frac{1}{2}$, est

$$\mathrm{O}k_0 = 3.$$

Ces deux courbes construites, si nous considérons une section quelconque, par exemple celle (IV) $x_4 x'_4$ d'abscisse x, les deux branches de courbes $x'_4 f$ et $x'_4 g$ qui représentent les premiers termes des seconds membres de (a') et (a'_1) partent l'une et l'autre du point x'_4 où cette section coupe la courbe $h_1 k_0 k$ qui vient d'être définie et sont tangentes en f et g à l'axe des x. Elles jouissent des propriétés suivantes, dont la démonstration est facile d'après leurs équations et qui sont détaillées dans notre *Statique graphique,* IIe Partie, p. 122.

Si la section considérée (IV) est dans le tiers moyen CC', ces courbes présentent leur concavité vers le haut. Comme elles passent au point x'_4 et sont tangentes à fg en f et g, elles ont la forme $fx'_4 g$ et peuvent être tracées en quelque sorte à vue.

Si un poids mobile occupe une position quelconque, le moment de flexion M qu'il détermine dans la Section IV est proportionnel à la portion de l'ordonnée comprise entre le pourtour $fx'_4 g$ et la ligne de poussée; soit ζ cette portion d'ordonnée mesurée à l'échelle indiquée de l'épure.

On aura

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}\, l_0 \frac{z'\zeta}{8f}$$

ou

$$(b'') \qquad M = \frac{P l_0 \zeta}{4}\left[\frac{2x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) - \frac{1}{3}\right].$$

Le crochet est positif, en sorte que M a même signe que ζ.

Par suite, le moment offrira un maximum positif, quand le poids passera dans la section, et un maximum négatif, mais ici plus petit en valeur absolue.

2° Si la section, comme celle (III), est dans un tiers extrême, celui de gauche, par exemple, et à droite du point j_1, la branche de gauche fx'_3 a une forme analogue à celle fx'_4; elle présente sa concavité vers le haut et ne coupe pas l'axe des x; celle de droite $x'_3 g$, au contraire, coupe cet axe et présente un point d'inflexion. L'ordonnée ζ présente un maximum positif $x_3 x'_3$ quand le mobile passe dans la section, et un maximum négatif $u_3 u'_3$ quand il passe sur la verticale où les tangentes en u_3 et u'_3 sont parallèles. Il en est, par suite, de même du moment de flexion M, en vertu de l'équation (b'').

3° Si la section considérée, comme celle (II) passe à gauche de l'asymptote j_1, la branche de gauche fx'_2 présente sa concavité vers le bas et est très voisine de la courbe fh; celle de droite $x'_2 u'_2 g$ coupe encore l'axe des x et présente une inflexion. L'ordonnée ζ présente cette fois son maximum *négatif* $x_2 x'_2$ quand le mobile passe dans la section, et son maximum *positif* quand il passe en dehors de la section sur une verticale $u_2 u'_2$ facile à déterminer sur l'épure.

Mais, comme ici le facteur entre crochets de l'équation (b'') est négatif, il s'ensuit que c'est toujours le maximum positif de M qui se produit dans la section, et le maximum négatif hors de la section.

4° Pour la section d'encastrement (I) de gauche répondant à $x = 0$, la branche de gauche, *celle qui, pour les autres sections, est tangente à l'axe des x en f*, n'existe plus : il n'y a que celle de droite. Son ordonnée a pour expression, comme le montre l'équation (a'_1), si l'on y fait $x = 0$, d'où $z' = -\frac{2f}{3}$,

$$12\left(1 - \frac{\alpha}{l_0}\right)^2 \frac{\alpha}{l_0}$$

dont le maximum a lieu pour $\frac{\alpha}{l_0} = \frac{1}{3}$ et est

$$Cc = \frac{4 \times 12}{27} = \frac{16}{9}.$$

Son inflexion a lieu pour $\frac{\alpha}{l_0} = \frac{2}{3}$ et l'ordonnée correspondante est

$$C'C' = \frac{Cc}{2} = \frac{8}{9}.$$

Le moment de flexion que détermine le poids voyageur dans la section d'encastrement, moment mesuré par les portions d'ordonnées comprises entre la ligne de poussée et celle *fcg va d'abord croissant* à mesure que le mobile *s'éloigne* de la section d'encastrement, atteint un maximum positif yy', puis décroît jusqu'à zéro, en s; il devient ensuite négatif, croît en valeur absolue jusqu'à un *maximum négatif* zz' et décroît de nouveau jusqu'à zéro.

L'équation (a_1), si l'on fait $x = 0$, donne

$$M = P l_0 \left[\frac{\alpha}{l_0} \left(1 - \frac{\alpha}{l_0}\right)^2 \left(-1 + \frac{5}{2}\frac{\alpha}{l_0}\right) \right],$$

qui montre que le point s où le moment de flexion, dans la section d'encastrement, s'annule, répond à l'abscisse $\alpha = \frac{2}{5} l_0$ du poids voyageur. Les maxima yy' et zz' répondent à

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0;$$

soit

$$16\alpha^2 - 8\alpha l_0 + l_0^2 = 0$$

ou

$$\frac{\alpha}{l_0} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{10};$$

soit sensiblement

$$\frac{\alpha}{l_0} = \frac{4 \pm 2,45}{10}$$

ou

$$\frac{\alpha'}{l_0} = 0,645, \qquad \frac{l_0 - \alpha'}{l_0} = 0,355,$$

et

$$\frac{\alpha''}{l_0} = 0,155, \qquad \frac{l_0 - \alpha''}{l_0} = 0,845;$$

d'où

$$M' = \quad 0{,}049\,P\,l_0,$$
$$M'' = -0{,}014\,P\,l_0.$$

5° Si nous revenons à présent à la section (IV), nous voyons que le moment maximum positif qu'y détermine le poids voyageur à l'instant où il passe dans la section même est plus grand que le maximum négatif qui se produit hors de la section ; mais, si la section considérée se rapproche indéfiniment de (I), le premier de ces maxima diminue jusqu'à zéro, tandis qu'il n'en est pas de même du second qui devient zz'.

Donc il existe une certaine position ξ de la section pour laquelle ces deux maxima sont égaux.

Pour les sections comprises entre ξ et f, c'est le maximum en dehors de la section qui l'emporte; pour les sections comprises entre ξ et O, c'est le maximum dans la section.

Un point ξ' jouissant de la même propriété se trouve à droite du point C'. Ainsi :

Il existe, dans la travée, deux points symétriques ξ et ξ', tels que, si l'on considère une section quelconque de la poutre comprise entre ces deux points, un poids voyageur y produit le moment de flexion maximum à l'instant où il passe dans la section, et ce moment, si x est l'abscisse de la section comptée depuis l'extrémité gauche de la poutre, est

$$(d) \qquad M = Px^2(l_0 - x)^2\left[\frac{9}{2} - 15\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right].$$

Si, au contraire, on considère une section non comprise entre les points ξ et ξ', le moment maximum qu'y détermine un poids voyageur ne se produit pas à l'instant où le poids se trouve dans la section même.

Pour avoir l'abscisse x du point ξ, il faut exprimer que le moment positif qui s'y produit quand le mobile y passe, moment exprimé par l'équation (d), est égal au maximum négatif. Ce dernier se trouve sur l'épure. Il se déduirait aussi de l'équation (a_1) en éliminant α entre cette équation et sa dérivée, ce qui donnerait le maximum négatif de M répondant à une section quelconque.

en fonction de son abscisse x et égalant sa valeur absolue — M au second membre de (d).

4° Pour les deux sections faites suivant les asymptotes j_1 et j'_1, les ordonnées comprises entre la ligne de poussée et celles fh, gk et $h_1 k_0 k_1$ sont infinies. Cela tient à ce que ces ordonnées représentent non pas les moments de flexion M, mais les produits

$$\frac{8fM}{P l_0 z'},$$

et que les deux points j et j' répondent à $z' = 0$. Les équations (a'), (a'_1), multipliées par z', donnent directement pour $z' = 0$, c'est-à-dire en ces points j et j' :

$$(f) \begin{cases} 1^\circ \text{ Pour } \alpha < x \ldots \quad \dfrac{M}{P l_0} = \left(\dfrac{\alpha}{l_0}\right)^2 \left[\left(3 - 2\dfrac{\alpha}{l_0}\right)\left(1 - \dfrac{x}{l_0}\right) - \left(1 - \dfrac{\alpha}{l_0}\right)\right], \\ 2^\circ \text{ Pour } \alpha > x \ldots \quad \dfrac{M}{P l_0} = \left(1 - \dfrac{\alpha}{l_0}\right)^2 \left[\left(1 + \dfrac{2\alpha}{l_0}\right)\dfrac{x}{l_0} - \dfrac{\alpha}{l_0}\right], \end{cases}$$

où il faut remplacer x par sa valeur

$$\frac{x}{l_0} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ces valeurs de M sont les mêmes que si la poutre n'était pas reliée au câble. Ainsi : *il existe, dans la poutre, deux points symétriques j_1 et j'_1 dont les abscisses comptées depuis l'extrémité gauche de la poutre sont*

$$(g) \qquad \frac{x}{l} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \pm 0,286,$$

et qui sont tels que le moment de flexion qu'y détermine un poids voyageur est le même que si la poutre n'était pas reliée au câble. Pour chaque position du poids voyageur définie par l'abscisse α, le moment de flexion y est donné par l'une des équations (f). Le moment maximum s'y produit, d'ailleurs, quand le poids est placé dans la section, soit pour $\alpha = x$, et a pour expression

$$(h) \qquad Px^2(l_0 - x)^2 \left[\frac{9}{2} - 15\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right] = 2Pl \times \frac{1}{36} = \frac{Pl}{18}.$$

§ 534.

CONCLUSIONS PRATIQUES RELATIVES A L'ACTION D'UN POIDS VOYAGEUR. — Si l'on ne veut pas opérer exactement, on pourra procéder ainsi à l'aide des équations (a) et (a_1).

1° Sur la section d'encastrement de gauche, soit pour $x = 0$, un poids P d'abscisse α produit un moment de flexion

$$M = -\frac{P(l_0 - \alpha)^2 \alpha}{l_0^3}\left(l_0 - \frac{5}{2}\alpha\right),$$

ses maxima M′ et M″ sont donnés par $\frac{dM}{d\alpha} = 0$, soit pour

$$\frac{\alpha}{l_0} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{10},$$

d'où

$$\frac{\alpha'}{l_0} = 0,645, \qquad \frac{\alpha''}{l_0} = 0,155,$$

et sont

$$M' = -0,049\,P\,l_0, \qquad M'' = 0,014\,P\,l_0.$$

La plus grande des deux, en valeur absolue, est

$$M\max = 0,049\,P\,l_0.$$

2° Pour les sections voisines, le moment maximum est encore plus faible; on peut donc conserver cette valeur jusqu'à une section d'abscisse x donnée par

$$l_0\left\{\left(\frac{x}{l_0}\right)^2\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2\left[\frac{9}{2} - 15\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right]\right\} = 0,049\,P\,l_0,$$

ou, en faisant $\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) = Z$,

$$Z^2\left(\frac{9}{2} - 15Z\right) = 0,049,$$

d'où

$$Z = 0,245,$$

et par suite

$$\frac{x}{l_0} = 0,948$$

et

$$1 - \frac{x}{l_0} = 0,052.$$

3° Pour les sections comprises entre ce point et le milieu de la poutre, le maximum sera

$$\text{M max} = \frac{\text{P}}{l_0^3} x^2 (l_0 - x)^2 \left[\frac{9}{2} - 15\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right],$$

ce qui donne le moment *maximum maximorum* au point défini par

$$\frac{d[\text{Z}^2(\frac{9}{2} - 15\text{Z})]}{d\text{Z}} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{Z} = \frac{1}{5},$$

d'où

$$\frac{x}{l_0} = 0,223,$$

et le moment *maximum maximorum* cherché est

$$\frac{\text{P}\,l_0}{25}\left(\frac{9}{2} - \frac{15}{5}\right) = \frac{51}{250}\text{P}\,l_0 = \frac{3}{50}\text{P}\,l_0 = 0,06\,\text{P}\,l_0.$$

4° Les mêmes valeurs se reproduiront symétriquement sur la moitié de droite de la poutre.

5° Si l'on a un convoi, il conviendra de faire l'épure du paragraphe précédent, d'où l'on déduit non seulement l'action d'une charge isolée, sur toutes les sections, mais celle du convoi, à l'aide des principes exposés au passage déjà mentionné de notre *Statique graphique* (IIe Partie).

§ 535.

EFFETS PRODUITS SUR UNE SECTION DONNÉE PAR DES COMBINAISONS DE CHARGES FIXES. — La même épure indique aussi quelles sont les portions de la poutre qu'il convient de surcharger par des charges fixes, lorsqu'on admet qu'elles peuvent régner sur tout ou partie de la poutre pour produire, dans une section donnée, les moments maxima.

Par exemple (*fig.* 67, p. 270), pour la section d'encastrement f, il faut surcharger la partie de la poutre comprise entre f et s pour obtenir le moment de flexion maximum positif et laisser le reste vide, et surcharger, au contraire, cette dernière partie et laisser la première vide pour obtenir le maximum négatif, puisque toute charge placée dans la première partie fournit un moment positif et toute charge placée dans la seconde, un moment négatif.

Les valeurs des moments sont données soit par les équations (a) et (a_1) ou par les ordonnées de l'épure comptées depuis la ligne de poussée, en observant que ces portions d'ordonnées représentent les premiers membres des équations (a') et (a'_1).

§ 536.

ACTION D'UNE CHARGE OU D'UN SYSTÈME DE CHARGES SUR LES TIGES DE SUSPENSION ET LES CABLES. — La tension q produite sur les tiges de suspension par un poids unique P d'abscisse α est donnée par la formule (6), (§ 532),

$$q = \frac{30 P \alpha^2 (l_0 - \alpha)^2}{l_0^5}$$

et, pour des charges en nombre quelconque,

$$q = \frac{30}{l_0^5} \Sigma P \alpha^2 (l_0 - \alpha)^2.$$

La poussée correspondante de l'arc est

$$Q = \frac{q l_0^2}{8 f}.$$

§ 537.

EMPLOI DE HAUBANS INFÉRIEURS CONTRE CERTAINS EFFETS DE LA TEMPÉRATURE. — Si la température du câble s'accroît, la poutre tend à s'abaisser et l'on verrait, comme pour la poutre simplement appuyée, qu'il en résulte de faibles efforts élastiques. Si la température baisse et que le câble soulève la poutre, alors les haubans cessent d'être convenablement tendus. Il faut donc envisager non plus seulement la travée centrale fg de longueur l_0 en la regardant comme encastrée, mais la poutre entière de longueur l comme simplement appuyée à ses extrémités, que nous désignons toujours par les lettres a et b, comme dans la *fig.* 64 (p. 228). On aura donc à appliquer les formules du § 530 et l'on verra encore qu'il en résulte de faibles forces élastiques. Par cela même que les forces sont faibles, on conçoit que, par quelques haubans placés au-dessous de la poutre, on puisse s'opposer à ce mouvement qui, s'il n'a pas l'inconvénient

de produire une fatigue directe sur la poutre, a celui de détendre les haubans et de faire ainsi que, les travées extrêmes n'étant plus soutenues sur toute leur longueur, se trouvent dans de mauvaises conditions pour supporter les charges auxquelles le pont doit livrer passage.

Il est donc intéressant de rechercher quelles sont les tensions que ces haubans inférieurs auraient à supporter pour s'opposer au soulèvement de la poutre par l'effet d'un raccourcissement calorifique du câble.

La tension q que détermine dans les tiges de suspension un accroissement de τ^0 (positif ou négatif) de la température est, comme nous l'avons vu (§ 521),

$$q = -\frac{\mathrm{EI}\,\delta\tau\, l}{\int_0^{l_0} mz\, dx}.$$

Ici m est le moment de flexion produit par une surcharge uniforme de 1^{kg} régnant sur la travée centrale fg seulement (*fig.* 68, p. 280) et ce moment doit être calculé en considérant la poutre entière ab comme simplement appuyée à ses extrémités.

Comptons les abscisses depuis le milieu O de la poutre. Alors les limites de l'intégration, au lieu d'être o et l_0, sont $-\frac{l_0}{2}$ et $+\frac{l_0}{2}$ et à cause de la symétrie on aura

$$q = -\frac{\mathrm{EI}\,\delta\tau\, l}{2\int_0^{\frac{l_0}{2}} mz\, dx'},$$

en appelant x' les abscisses comptées du point O.

Les réactions des appuis sont $\frac{l_0}{2}$. Appliquons en f deux forces égales et opposées $\frac{l_0}{2}$ et $-\frac{l_0}{2}$.

Le moment de flexion en un point G de la travée centrale fg se compose du moment du couple $\left(\frac{l_0}{2}, -\frac{l_0}{2}\right)$, soit

$$\frac{l_0}{2} \times af = \frac{l_0}{2}\,\frac{l-l_0}{2} = \frac{l_0(l-l_0)}{4}$$

et du moment de flexion qui se produirait si les appuis étaient en f et g. Donc

$$m = \frac{l_0(l-l_0)}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{l_0^2}{4} - x'^2\right),$$

$$m = \frac{ll_0}{4} - \frac{l_0^2}{8} - \frac{1}{2}x'^2$$

D'ailleurs, l'ordonnée du câble est

$$z = f\left(1 - \frac{4x'^2}{l_0^2}\right).$$

Fig. 68.

Donc

$$\int_0^{\frac{l_0}{2}} m z \, dx' = f\int_0^{\frac{l_0}{2}} \left(\frac{ll_0}{4} - \frac{l_0^2}{8} - \frac{x'^2}{2}\right)\left(1 - \frac{4x'^2}{l_0^2}\right) dx'$$

$$= f\left[\frac{l_0}{3}\left(\frac{ll_0}{4} - \frac{l_0^2}{8}\right) - \frac{1}{15}\left(\frac{l_0}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{f}{3}\left(\frac{l_0}{2}\right)^2\left(l - \frac{l_0}{2} - \frac{l_0}{10}\right) = \frac{f}{15}\left(\frac{l_0}{2}\right)^2(5l - 3l_0),$$

d'où

$$q = -\frac{30\,\mathrm{EI}\,\delta\tau\, l}{f\left(\frac{l_0^2}{2}\right)^2(5l - 3l_0)}.$$

La charge totale sera donc

$$ql_0 = -\frac{30\,\mathrm{EI}\,\delta\tau\, l}{fl_0(5l - 3l_0)}.$$

Et chaque système de haubans placé à l'une des extrémités du pont devra supporter la moitié, soit, s'il y a un abaissement de

température de $\tau'^{\circ} = -\tau^{\circ}$,

$$\frac{15\,\text{EI}\,\delta\tau' l}{f l_0 (5l - 3l_0)}.$$

Si $\tau' = 28^{\circ}$, $\delta = \frac{1}{70000}$, $\delta\tau' = 4 \times 10^{-4}$, $\text{E} = 2 \times 10^{10}$ et, si

$$l_0 = \frac{l}{2},$$

ce sera

$$\frac{30\text{I} \times 4 \times 10^{6}}{\frac{1}{2} fl(5 - \frac{3}{2})} = \frac{4 \times 12\text{I} \times 10^{7}}{7fl}.$$

Si $f = \frac{1}{10}l$, $l = 100^{\text{m}}$, on aura

$$\frac{4 \times 12\text{I} \times 10^{4}}{7}.$$

Supposons que la poutre ait 2^{m} de hauteur et se compose de quatre cornières de $0^{\text{m}},01$ avec $0^{\text{m}},10$ d'ailes surmontées de tôles de $0^{\text{m}},05$ d'épaisseur.

On aura environ

$$\text{I} = 0{,}012 = 28 \times 10^{-3}.$$

Donc la charge verticale ascendante serait

$$\text{P} = \frac{4 \times 12 \times 28 \times 10}{7} = 1920^{\text{kg}}.$$

On peut s'y opposer par un hauban placé à chaque extrémité de chaque câble. Il éprouverait une résistance verticale

$$\frac{\text{P}}{2} < 2000^{\text{kg}},$$

c'est-à-dire beaucoup moindre que celle de $5^{\text{t}},5$, produite par une charrette de 11 tonnes.

Et en réalité, la charge serait encore moindre, puisque nous n'avons pas tenu compte des appuis des deux extrémités de la poutre, lesquels supportent une partie de la réaction.

B. TRAVÉES EXTRÊMES.

§ 538.

HAUBANS SUPÉRIEURS ET TRAVÉES QU'ILS PORTENT. — On détermine d'ordinaire les haubans supérieurs de façon que chacun d'eux, supposé existant seul, puisse supporter sa part de la charge permanente, plus une surcharge qu'on suppose égale à la moitié de 11 tonnes.

Soit P la charge verticale à laquelle doit ainsi résister un hauban. Désignons par r_i sa longueur, par β_i l'angle qu'il fait avec la verticale. Sa tension sera

$$\frac{P}{\cos \beta_i}.$$

On voit ainsi que cette tension est d'autant plus grande que l'angle β_i est lui-même plus grand. On serait donc amené, pour que tous les haubans travaillassent à une même tension R′, à leur donner des sections croissantes en allant des piles vers le milieu du pont.

Mais, au point de vue de leur fabrication, il est plus commode de leur donner à tous la même section. On adopte naturellement la section la plus défavorable, celle du hauban le plus voisin du milieu du pont.

Cette solution a l'inconvénient de conduire à une grande dépense de matière. On peut la diminuer un peu en espaçant inégalement les points d'attache.

Mais là encore il peut y avoir intérêt, au point de vue de la construction, à ce que l'espacement soit uniforme comme celui des poutrelles transversales.

On doit toutefois observer que cette dépense de matière n'est pas tout à fait sans utilité.

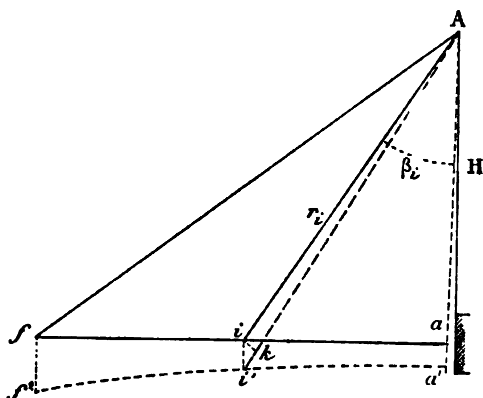
Car, si les sections des haubans sont un peu exagérées, il en résulte une grande fixité dans les deux travées de rive et, par suite, aussi dans la travée centrale.

Les haubans de fort diamètre résistent d'ailleurs aussi dans une certaine mesure à la compression, c'est-à-dire au soulèvement de

la poutre, soit par l'effet de la température, soit par celui de charges placées au milieu de la travée centrale.

On peut cependant, si on le désire, en faisant intervenir la raideur de la poutre qui, dans les déterminations dont il vient d'être parlé, n'entre pour rien, faire en sorte que les haubans, même également espacés et d'égale section travaillent tous de la même manière sous l'influence d'une charge *donnée une fois pour toutes,* mais arbitrairement choisie. En effet, soit Ai (*fig.* 69) le

Fig. 69.



hauban n° i, dont la longueur et l'inclinaison sur la verticale sont respectivement r_i et β_i.

Nous appellerons H la hauteur Aa. Nous supposons qu'on détermine la travée extrême af de façon qu'elle résiste abstraction faite de l'appui a, c'est-à-dire en la supposant libre à son extrémité, venant simplement buter contre la paroi verticale de la culée. Si elle tient dans ces conditions, elle résistera *a fortiori* dans la réalité.

Ceci posé, soit S la section commune à tous les haubans. Si l'on veut qu'ils travaillent tous à une même tension R', ils s'allongeront tous de la même quantité

$$\frac{R'}{E'},$$

par unité de longueur, E' étant leur coefficient d'élasticité.

Donc celui Ai, de longueur r_i, s'allongera de

$$\frac{R' r_i}{E'},$$

et si l'on appelle $ii' = y_i$ l'abaissement du point d'attache par suite de la flexion de la poutre, il sera venu prendre la position Ai'.

Menons ik perpendiculaire à Ai'.

L'allongement ci-dessus est aussi égal à ki' ou $y_i \cos\beta_i$.

Donc

$$y_i = \frac{R'}{E'}\frac{r_i}{\cos\beta_i} = \frac{R'}{E'H}r_i^2$$

ou

$$y_i = \frac{R'}{E'H}(H^2 + x_i^2),$$

en appelant $x_i = ia$ l'abscisse du point d'attache i, comptée depuis l'extrémité de rive a de la poutre. On voit donc que si, en effet, tous les haubans travaillent de même, quelle que soit leur section, la poutre fléchira de façon que les points d'attache viennent se placer sur une parabole du second degré dont la verticale aA est l'axe. Comme les points d'attache sont très rapprochés, on peut admettre que la fibre moyenne tout entière formera un arc de cette parabole et qu'ainsi l'équation de la fibre moyenne déformée est

$$y = \frac{R'}{E'H}(H^2 + x^2),$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2R'}{E'H}.$$

Le moment de flexion M, en un point quelconque, sera donc, en vertu de l'équation

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M,$$

$$(a) \qquad M = -\frac{2E}{E'}\frac{R'I}{H}.$$

Cela étant, supposons qu'on veuille que ces conditions d'égale résistance soient remplies sous l'action d'une charge quelconque se composant de la charge permanente p_0 et de surcharges isolées

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n$$

appliquées respectivement aux points d'attaches numéros

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n.$$

Le moment de flexion M, au point d'attache n° i, proviendra :

1° Des charges données qui agissent à gauche de ce point;

2° Des réactions verticales agissant sur les points d'attache placés de même à sa gauche ;

3° Des efforts que la partie considérée af de la poutre peut éprouver dans la section f, par suite de charges existant dans la travée centrale. Ces efforts se composent du moment d'encastrement trouvé par les précédentes recherches et de l'effort tranchant dans la section d'encastrement f, lequel se déduit aussi de ces mêmes recherches, puisque l'effort tranchant est la dérivée prise en signe contraire du moment de flexion.

Appelons M_f et T_f les valeurs ainsi trouvées de M et T dans la section f.

Appelons, comme précédemment, l la longueur totale du pont, l_0 la longueur de la travée centrale, d'où

$$fa = \frac{l - l_0}{2}.$$

Le moment de flexion cherché sera

$$M = -\frac{p_0}{2} x_i^2 - \sum_{j=n}^{j=i+1} P_j x'_j + \sum_{j=n}^{j=i+1} N_j x'_j,$$

en appelant

$$x' = \frac{l - l_0}{2} - x$$

les abscisses comptées de l'extrémité f et N_j la réaction au point d'attache répondant à l'indice j.

Mais la tension par unité de surface de chaque hauban étant R′ et la section S étant aussi la même pour tous, leur tension sera

$$R'S.$$

Sa composante verticale pour le hauban n° j est donc

$$N_j = \frac{R'S}{\cos\beta_j} = \frac{R'S}{H} r_j,$$

d'où

$$M = -\frac{p}{2} x_i'^2 - \sum_{j=n}^{j=i+1} P_j x'_j + \frac{R'S}{H} \sum_{j=n}^{j=1} r_j x'_j.$$

On connaîtrait donc M si l'on avait déterminé la section S à donner aux haubans. Pour obtenir cette constante, observons que le moment de flexion doit être nul au point i, soit pour

$$x' = \frac{l - l_0}{2},$$

d'où

$$0 = -\frac{p}{2}\left(\frac{l - l_0}{2}\right)^2 - \sum_{j=n}^{j=1} P_j x'_j + \frac{R'S}{H}\sum_{j=n}^{j=1} r_j x'_j,$$

où tout est connu sauf S.

Ayant S, on connaît M. Portant la valeur de M dans (a), on aura le moment d'inertie I à donner à chaque section de la poutre pour que la condition d'égale résistance supposée au hauban soit effectivement remplie.

Si l'on veut à présent se rendre compte de la tension maxima à laquelle travaille la poutre supposée de hauteur h, il suffit d'observer que cette force est donnée par l'équation

$$\pm R = \frac{Mh}{2I},$$

qui combinée avec (a) donne, pour la valeur absolue de R,

$$R = \frac{E}{E'}\frac{h}{H}R'.$$

On voit que la force R sera toujours beaucoup plus petite que celle R' à laquelle on fait travailler les haubans, la hauteur h de la poutre étant toujours très petite par rapport à celle H. On a donc toute sécurité. On voit de plus que R est constant, c'est-à-dire que la poutre est elle-même d'égale résistance comme les haubans.

QUATRIÈME SECTION.

CORPS DE RÉVOLUTION SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉS.

CHAPITRE X.

SURFACES DE RÉVOLUTION FLEXIBLES.

§ 539.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION PARFAITEMENT FLEXIBLE. — Considérons une surface matérielle de révolution autour d'un axe vertical ou une portion d'une telle surface limitée à un ou deux parallèles que nous appellerons les *bords* de la surface.

Nous en représenterons les divers points, comme en Géométrie descriptive, par leurs projections verticales et horizontales.

Soient

Ox la ligne de terre (*fig.* 70, p. 288);
Oy et O_0 les projections de l'axe;
O_0x_0 la trace horizontale du méridien principal ou parallèle au plan vertical de projection;
G_0G_u la courbe méridienne projetée en vraie grandeur sur le plan vertical.

Nous admettons qu'en chaque point G la surface a une épaisseur ε constante ou variable d'un point à un autre de la courbe méridienne, constante le long de chaque parallèle.

Nous la supposons parfaitement flexible. Elle est en équilibre sous l'action de son propre poids et de forces symétriquement distribuées autour de l'axe Oy et d'ailleurs quelconques. De ces forces, les unes agissant sur la surface proprement dite sont données; les autres agissant sur les deux bords peuvent être données ou in-

connues suivant que la surface est libre ou appuyée par ses bords ou par l'un d'eux.

Il est remarquable que les forces élastiques qui se développent dans une pareille surface libre ou appuyée par un seul de ses bords puissent être déterminées d'après les seuls principes de la Statique, comme celles qui se produisent dans une simple courbe parfaitement flexible.

Fig. 70.

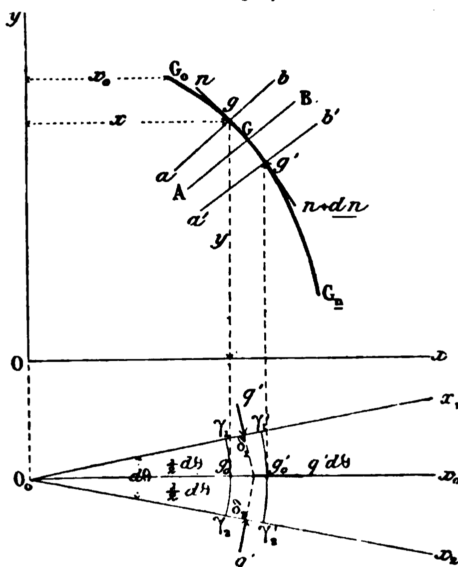
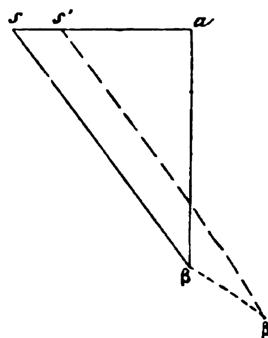


Fig. *a*.



Mais tandis qu'une courbe plane ne peut être en équilibre que si elle coïncide avec l'une des courbes funiculaires des charges qu'elle porte, une surface de révolution est en équilibre, quelle que soit sa courbe méridienne et quelles que soient les forces symétriques qui la sollicitent, pourvu, bien entendu, qu'elles satisfassent aux conditions d'équilibre relatives aux systèmes invariables, lesquelles se réduisent ici, à cause de la symétrie, à une seule, à savoir que la somme des projections des forces agissantes sur l'axe de la surface soit nulle.

Considérons une portion de la surface comprise entre deux plans méridiens O_0x_1, O_0x_2 également inclinés sur le méridien principal et formant entre eux l'angle infiniment petit $d\theta$.

Puisque tout est symétrique autour de l'axe, il suffit de chercher les conditions d'équilibre et les forces élastiques de cette portion de surface.

Elle peut être considérée comme une simple courbe matérielle ayant $G_0 G_n$ pour axe et des dimensions transversales infiniment petites.

Si g est un quelconque de ses points, projeté horizontalement en g_0 et que l'on considère l'élément $\gamma_1 g_0 \gamma_2$ du parallèle compris dans l'onglet $x_1 O_0 x_2$, la section transversale ab de la courbe dont il s'agit est un rectangle ayant suivant ab la hauteur ε constante ou variable et dans le sens horizontal la longueur $\gamma_1 \gamma_2$.

En désignant par x et y les coordonnées du point quelconque g de la courbe donnée $G_0 G_n$, cet arc a pour longueur

$$\gamma_1 \gamma_2 = x\, d\theta, \tag{1}$$

de sorte que l'aire de la section transversale σ de la courbe est

$$\sigma = \varepsilon x\, d\theta. \tag{2}$$

La courbe $G_0 G_n$ est en équilibre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées et des réactions qu'elle éprouve de la part du reste de la surface dans les méridiens $O_0 x_1$, $O_0 x_2$.

Soit s l'arc $G_0 g$. Considérons l'élément projeté verticalement suivant $gg' = ds$ et horizontalement en $g_0 g'_0$; il est limité par les éléments $\gamma_1 g_0 \gamma_2$ et $\gamma'_1 g'_0 \gamma'_2$ des parallèles g et g' compris dans l'angle $x_1 O_0 x_2$.

Désignons par q la force élastique rapportée à l'unité de surface qui agit normalement à l'élément de méridien projeté en $\gamma_1 \gamma'_1$.

Nous appellerons cette force *la pression ou tension méridienne* et nous la regarderons comme positive si c'est une pression. Sa grandeur pour l'élément considéré est

$$q' = q \varepsilon\, ds. \tag{3}$$

Elle agit au milieu δ_1 de l'élément projeté en $\gamma_1 \gamma'_1$, normalement à cet élément.

Au milieu δ_2 de l'élément projeté en $\gamma_2 \gamma'_2$ agit une force pareille normalement à cet élément.

La résultante de ces deux forces est horizontale comme ces forces elles-mêmes et placée dans le plan du méridien principal

O_0x_0. Cette résultante, égale à la somme des projections sur O_0x_0 des deux forces q' elles-mêmes, a donc pour expression

$$2q' \sin \tfrac{1}{2} d\theta = 2q' \times \tfrac{1}{2} d\theta = q' d\theta = q\varepsilon\, ds\, d\theta.$$

Ainsi : *un onglet de la surface compris entre deux plans méridiens* O_0x_1, O_0x_2, *formant l'angle infiniment petit* $d\theta$, *peut être considéré comme une simple courbe matérielle, ayant* G_0G_n *pour fibre moyenne et une section transversale variable*

$$\sigma = \varepsilon x\, d\theta,$$

pourvu qu'aux forces qui agissent sur chacun de ses éléments ds *on adjoigne des* forces horizontales

$$(4) \qquad q'\, d\theta = q\varepsilon\, d\theta\, ds,$$

où q *est une fonction inconnue de l'arc* s *ou des coordonnées* x, y *d'un point de l'élément* ds.

L'élément ds sera donc en équilibre sous l'action :

1° Des forces qui lui sont directement appliquées. Elles se composent de son poids qui est

$$\Pi\sigma\, ds = \Pi\varepsilon x\, d\theta\, ds,$$

si Π désigne le poids spécifique de la matière qui compose la surface donnée;

2° Des pressions données exercées sur la surface. Nous en désignerons les composantes parallèles aux axes et rapportées à l'unité de surface par X et Y, en sorte que les composantes de celles qui agissent sur l'élément de surface considérée sont

$$X\, ds\, x\, d\theta, \qquad Y\, ds\, x\, d\theta;$$

3° Des tensions ou pressions exercées sur les sections ab, $a'b'$ faites en g et g'. Soit n la pression par unité de surface exercée en g. Nous comptons n positivement si c'est une pression, c'est-à-dire si elle est dirigée dans le sens admis pour les s positifs. La pression exercée sur la section σ est

$$n\sigma = n\varepsilon x\, d\theta.$$

Ses projections sont

$$n\varepsilon x \frac{dx}{ds} d\theta, \quad n\varepsilon x \frac{dy}{ds} d\theta$$

Les composantes de la pression exercée en g' sont les précédentes augmentées de leurs différentielles et changées de signe, soit

$$-\left(n\varepsilon x\frac{dx}{ds}+\frac{\frac{d}{ds}n\varepsilon x\frac{dx}{ds}}{ds}ds\right)d\theta,$$
$$-\left(n\varepsilon x\frac{dy}{ds}+\frac{\frac{d}{ds}n\varepsilon x\frac{dy}{ds}}{ds}ds\right)d\theta;$$

et les sommes des composantes de ces deux forces sont

$$-\frac{\frac{d}{ds}n\varepsilon x\frac{dx}{ds}}{ds}ds\,d\theta,$$
$$-\frac{\frac{d}{ds}n\varepsilon x\frac{dy}{ds}}{ds}ds\,d\theta;$$

4° De la force horizontale

$$q\varepsilon\,ds\,d\theta.$$

Les sommes des projections de toutes ces forces sur les deux axes devant être nulles, on a donc les deux équations

$$(5)\qquad\begin{cases}\dfrac{\frac{d}{ds}n\varepsilon x\frac{dx}{ds}}{ds}=\mathrm{X}x+q\varepsilon,\\[2ex] \dfrac{\frac{d}{ds}n\varepsilon x\frac{dy}{ds}}{ds}=(\mathrm{Y}-\Pi\varepsilon)x,\end{cases}$$

le signe — du dernier terme provenant de ce qu'on suppose l'axe Oy ascendant.

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du fuseau considéré et, par suite, pour l'équilibre de la surface entière, puisque tous les fuseaux dont elle se compose sont pareils et soumis aux mêmes forces.

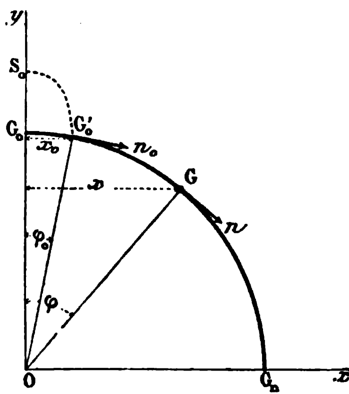
Quelle que soit la courbe méridienne donnée et quelles que soient les forces données X et Y, ces deux équations peuvent, en général, être satisfaites par des valeurs convenables des forces inconnues n et q et fournissent ces forces.

§ 540.

APPLICATION A UNE SURFACE SPHÉRIQUE. — Soit (*fig.* 71) G_0G_n un quart de cercle; considérons-en une partie G_0G engendrant une portion de surface sphérique d'épaisseur constante ε posée sur le plan horizontal OG_nx ne supportant que son propre poids et celui d'une surcharge formée par la construction supérieure $S_0G'_0$ elle-même de révolution.

Soient P le poids de cette construction et n_0 la valeur de la compression n en G'_0.

Fig. 71.



Désignons par a le rayon de l'arc de cercle, par φ l'angle polaire qu'un rayon quelconque OG fait avec la verticale, par φ_0 la valeur de φ pour le rayon OG'_0.

Les forces $-n_0\varepsilon x_0\,d\theta$ doivent faire équilibre au poids P, ce qui exige que la somme de leurs projections verticales soit égale et contraire à P, d'où

$$2\varpi n_0 \varepsilon x_0 \sin\varphi_0 = P,$$

$$(6)\qquad n_0 = \frac{P}{2\varpi\varepsilon x_0 \sin\varphi_0} = \frac{P}{2\varpi\varepsilon a \sin^2\varphi_0}.$$

Ceci étant, on a ici

$$X = Y = 0,$$

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = a\cos\varphi,$$

$$ds = a\,d\varphi,$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = -\sin\varphi.$$

Par suite, les équations (5) deviennent

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\varphi}\, n \sin\varphi \cos\varphi = q, \\ \dfrac{d}{d\varphi}\, n \sin^2\varphi = \Pi a \sin\varphi, \end{cases}$$

qui fournissent les pressions n et q. On tire de la dernière

$$n \sin^2\varphi = -\Pi a \cos\varphi + \text{const.}$$

Et comme, pour $\varphi = \varphi_0$, on a $n = n_0$, on aura

$$(8)\qquad n \sin^2\varphi = n_0 \sin^2\varphi_0 + \Pi a(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

qui détermine la pression n sur un élément normal à la surface mené tangentiellement à un parallèle quelconque.

On voit que n est partout positif ou que, suivant les méridiens, la surface est partout comprimée.

Connaissant n, la première équation donne la pression q exercée sur chaque élément situé dans un plan méridien.

L'épaisseur ε doit être prise de façon que ces pressions ne dépassent nulle part celles qu'on veut adopter eu égard à la matière employée.

Cas d'une surface hémisphérique. — Supposons $\varphi_0 = 0$. Alors on a une surface hémisphérique.

L'équation (8) devient

$$(8')\qquad n = \Pi a \frac{1 - \cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Portant dans la première des équations (7), il vient

$$q = \Pi a \times \frac{d\,\dfrac{\cos\varphi(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}}{d\varphi},$$

soit

$$q = -\Pi a \frac{\cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1}{\sin^2\varphi}$$

ou, en divisant haut et bas par $1 - \cos\varphi$,

$$q = \Pi a \frac{\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1}{1 + \cos\varphi}.$$

On voit que, pour $\varphi = 0$,

$$q = \frac{\Pi a}{2}.$$

L'équation (8') donne aussi, pour $\varphi = 0$,

$$n = \frac{\Pi a}{2},$$

ce qui montre qu'au sommet, q et n sont deux pressions égales, ce qu'il était aisé de prévoir.

Mais, tandis que n reste constamment positif, q change de signe. L'équation

$$q = 0 \quad \text{ou} \quad \cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$$

donne en effet

$$\cos\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \tag{9}$$

qui correspond à environ

$$\varphi = 51°49'. \tag{9'}$$

Donc :

Depuis le sommet jusqu'à l'angle de 51°49', *les parallèles de la surface sont comprimés. A partir de là, ils sont tendus.*

§ 541.

SURFACE CONIQUE. — Supposons (*fig.* 72, p. 295) que le méridien soit une droite G_0G_n faisant l'angle γ avec la verticale. On aura

$$\frac{dx}{ds} = \sin\gamma, \qquad \frac{dy}{ds} = -\cos\gamma, \qquad ds = \frac{1}{\sin\gamma}\,dx.$$

Donc les équations (5), en y faisant $X = Y = 0$ et ε constant, deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\sin^2\gamma\,\frac{dnx}{dx} = q,\\ &\sin\gamma\cos\gamma\,\frac{dnx}{dx} = \Pi x, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

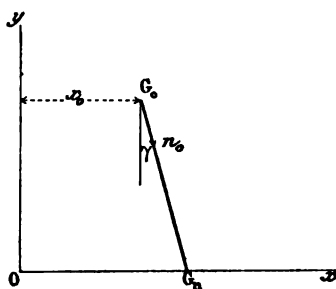
Si x_0 est le rayon du parallèle G_0 et n_0 la pression exercée en G_0

suivant G_0G_n (pression qui peut provenir d'une construction supérieure et se déterminer alors comme au paragraphe précédent), la dernière donne

$$nx - n_0x_0 = \frac{\Pi(x^2 - x_0^2)}{2\sin\gamma\cos\gamma}, \tag{11}$$

qui fournit la pression n.

Fig. 72.



D'ailleurs, en divisant les deux équations (10) membre à membre, on obtient

$$\frac{q}{\Pi x} = \frac{1}{\cos\gamma},$$

$$q = \frac{\Pi}{\cos\gamma}x, \tag{12}$$

qui montre qu'ici les parallèles sont partout comprimés.

§ 542.

SOLUTION GRAPHIQUE DU PROBLÈME GÉNÉRAL. — Il est facile de résoudre graphiquement le problème qui fait l'objet du paragraphe précédent.

Observons qu'une portion quelconque G_0G_n (*fig.* 70, p. 288) du fuseau compris entre les méridiens O_0x_1, O_0x_2 doit être en équilibre sous l'action des forces données qui lui sont directement appliquées, de la pression n par unité de surface qui s'exerce en G tangentiellement à la courbe méridienne et des forces horizontales $q'\,d\theta$.

Toutes ces forces comprennent le facteur $d\theta$; nous le supprimons, sauf à le rétablir dans le résultat final.

Soit $P\,d\theta$ la résultante des charges données verticales ou non qui agissent sur la portion $G_0 G$ du fuseau. Elle doit être équilibrée par deux autres forces de directions connues, à savoir :

1° La pression $n\varepsilon x\,d\theta$, dirigée suivant la tangente à la courbe méridienne en G ;

2° La résultante des forces $q'\,d\theta = q\varepsilon\,ds\,d\theta$, laquelle est horizontale.

Par suite, la force finie P doit être équilibrée par la force finie $n\varepsilon x$ et la résultante des forces horizontales $q' = q\varepsilon\,ds$, résultante que nous appellerons Q et qui a pour expression

$$(13)\qquad Q = \int_0^s q'\,ds = \int_0^s q\varepsilon\,ds.$$

Représentons donc (*fig. a*, p. 288), à une échelle convenue, la force P par une longueur $a\beta$. Par le point a menons une horizontale ; par le point β, une parallèle à la tangente en G ; ces deux droites se coupent en un point s.

La ligne βs représente à l'échelle adoptée, pour la force P, la pression exercée en G par la partie inférieure de la surface sur la partie supérieure, au facteur $d\theta$ près, et la pression inverse de cette dernière sur la première est $s\beta$.

De même, sa représente la force Q ou la résultante des forces horizontales $q'\,ds$.

Donc :

La pression n par unité de surface sera telle que

$$n\varepsilon x = \beta s,$$

$$(14)\qquad n = \frac{\beta s}{\varepsilon x},$$

où ε et x sont mesurés à l'échelle des longueurs.

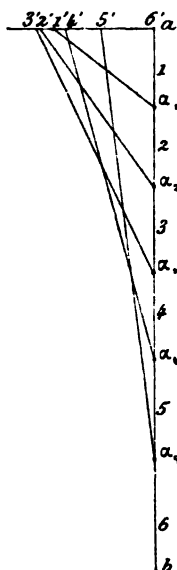
De même,

$$(15)\qquad \beta a = \int_0^s q\varepsilon\,ds.$$

S'il agissait une pression n_0 par unité de surface en G_0, on mènerait par le point β une parallèle à la tangente en ce point et l'on prendrait, sur cette ligne, une longueur $\beta\beta'$ égale à $n_0\varepsilon_0 x_0$, et c'est

par le point β' qu'on mènerait la parallèle à la tangente en G ; elle rencontre *as* en s'. La pression en G serait donnée par $\beta's'$, et c'est $s'a$ qui représenterait Q.

Fig. *a*.



D'après cela, on peut trouver, en tous les points, les valeurs des forces élastiques *n* et *q*.

Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait pas de pression en G_0 (ce qui aura toujours lieu si le point G_0 est sur l'axe Oy, c'est-à-dire si la surface ne présente pas d'ouverture à sa partie supérieure) et que les charges sont verticales.

Divisons l'arc $G_0 G_n$ (*fig.* A, p. 298) en un certain nombre de parties. Suivant qu'on le jugera plus commode, on divisera l'arc en parties égales, ou sa projection verticale.

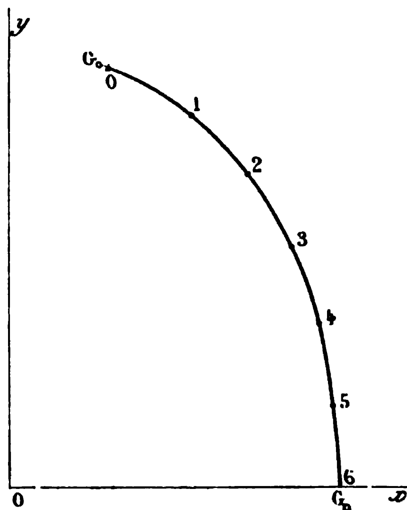
Dans le cas d'une surface sphérique, ce dernier mode est le meilleur, puisqu'une zone sphérique étant proportionnelle à sa hauteur, le poids des portions de surface comprises entre les deux méridiens inclinés sous l'angle $d\theta$ seront ainsi tous égaux et, par suite, aussi leurs quotients par $d\theta$.

Soient

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

les points de division dont les deux extrêmes coïncident avec les extrémités G_0 et G_n de l'arc. Représentons (*fig. a*, p. 297) le polygone des charges qui agissent sur les six parties 01, 12, ... dans lesquelles nous avons divisé l'arc $G_0 G_n$. Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 ces forces.

Fig. A.



Par le point a menons une horizontale et par les points de division 1.2, 2.3, ... (*fig. a*), menons des parallèles aux tangentes à la méridienne (*fig.* A) en 1, 2, 3, 4, 5, 6 (nous supposons cette dernière verticale). Soit (*fig. a*) 1′ le point d'intersection de la parallèle à la tangente en 1 menée par 1.2 ou α_1 avec l'horizontale de a; 2′ le point d'intersection avec cette horizontale de la parallèle à la tangente en 2 menée par 2.3 ou α_2, et ainsi de suite.

Nous aurons ainsi une suite de points

$$1', 2', 3', 4', 5', 6'.$$

Les lignes $\alpha_1 1'$, $\alpha_2 2'$, ... représentent les pressions $n\sigma = n\varepsilon x$ exercées sur la fibre moyenne.

D'autre part, $a1'$, $a2'$, $a3'$, ... représentent les résultantes des forces q' agissant respectivement au-dessus des points 1, 2, 3, ...

Donc les longueurs $1'2'$, $2'3'$, ... représentent respectivement les forces q' elles-mêmes.

Ainsi $1'2'$ représente le produit $q \varepsilon \Delta s$, Δs étant la longueur de la portion de méridien 12 et q la pression méridienne moyenne dans cet intervalle 12.

On voit que les longueurs $a1'$, $a2'$, $a3'$ vont d'abord en croissant, puis atteignent un maximum et décroissent; par suite, leurs différences $1'2'$, $2'3'$, ..., c'est-à-dire les valeurs de $q \varepsilon \Delta s$ et, aussi, celles de q sont d'abord positives; puis il y a un point où q est nul, puis cette force devient négative. Cela confirme le résultat obtenu analytiquement pour la sphère.

Remarque. — Les forces $q \varepsilon \, ds$ portées sur l'horizontale a jouent, relativement à la courbe d'équilibre $G_0 G_n$, le rôle d'une poussée, mais d'une *poussée variable* d'un point à un autre de l'arc, au lieu de la poussée constante des arcs ordinaires soumis à des charges verticales.

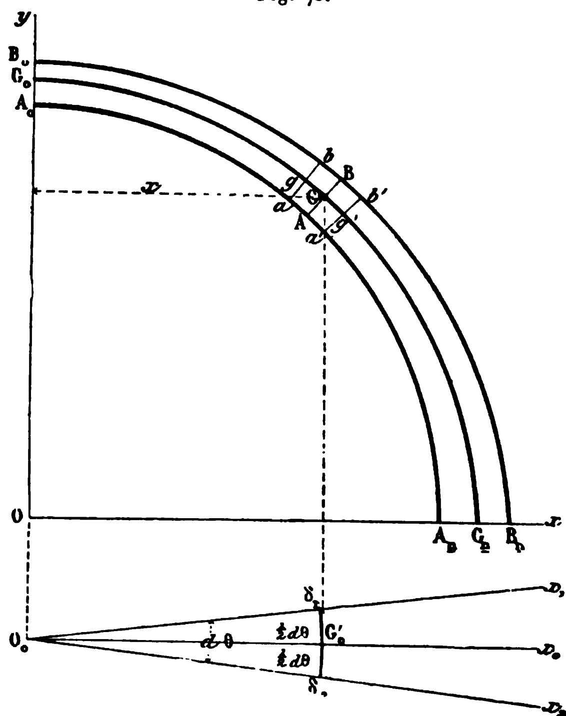
CHAPITRE XI.

COUPOLES MÉTALLIQUES.

§ 543.

MÉTHODE GÉNÉRALE. — Considérons à présent une coupole dont la section méridienne principale (*fig.* 73) soit $A_0B_0A_nB_n$; la sur-

Fig. 73.



face A_0A_n est l'intrados, la surface B_0B_n l'extrados de la coupole.

Désignons par G_0G_n sa ligne moyenne, c'est-à-dire une ligne

telle que si, par deux de ses points infiniment voisins g et g' on lui mène des normales ab, $a'b'$ jusqu'à leurs rencontres avec l'intrados et l'extrados, le centre de gravité G de l'aire $aba'b'$ soit lui-même sur la ligne considérée.

Nous comptons l'épaisseur constante ou variable ε de la coupole suivant les normales AGB à la ligne moyenne.

Nous ne regardons pas cette épaisseur comme assez petite pour que la coupole puisse être assimilée à une simple surface parfaitement flexible, mais nous admettons cependant qu'elle est très petite par rapport aux courbures de la coupole.

Nous pouvons, par suite, assimiler le trapèze $abd'b'$ à un rectangle et regarder la ligne moyenne G_0G_n comme le lieu des milieux de ses normales AB.

Nous admettons que la coupole, formée d'une matière élastique et homogène, est en équilibre sous l'action de son propre poids et de charges symétriquement distribuées autour de son axe.

Les forces et les déplacements élastiques sont donc aussi symétriques autour de cet axe et il suffit, comme au Chapitre précédent, de considérer la portion de la coupole comprise entre deux plans méridiens O_0x_1, O_0x_2 formant l'angle infiniment petit $\frac{1}{2}\,d\theta$ avec le méridien principal O_0x_0.

Cette portion de la coupole peut être assimilée, non plus, comme au Chapitre précédent, à une courbe parfaitement flexible, mais à un arc élastique dont G_0G_n est la fibre moyenne et dont la section transversale, sensiblement rectangle, est toujours

$$\sigma = \varepsilon x \, d\theta. \tag{1}$$

Dans le problème traité au Chapitre précédent, les deux dimensions $x\,d\theta$ et ε de cette section étaient regardées comme infiniment petites. Ici la première est seule dans ce cas, la seconde est finie. Par suite, les forces élastiques qui se développent dans cette section aux divers points de AB ne peuvent plus être regardées comme uniformément réparties suivant cette ligne et donnant, par suite, lieu à une résultante $n\sigma$ appliquée en son milieu G.

Mais, par raison de symétrie, toutes celles qui sont appliquées à une section normale AB de l'arc considéré donnent des résultantes partielles situées dans le plan de symétrie $A_0B_0A_nB_n$ de

cet arc, de sorte que, si on les transporte au point G, elles fournissent :

1° Une composante N normale à AB ou tangente à G_0G_n, qui produit la compression de cette ligne et qui est l'analogue de la force $n\sigma$ considérée précédemment;

2° Un effort tranchant T dirigé suivant AB;

3° Un moment de flexion M.

Toutes les formules précédemment trouvées pour les arcs ayant un plan de symétrie $A_0B_0A_nB_n$ sont applicables ici, pourvu qu'aux forces directement appliquées à l'arc G_0G_n que nous considérons, on adjoigne les réactions qu'il éprouve de la part du reste de la coupole dans les plans méridiens O_0x_1, O_0x_2.

Ces réactions, par raison de symétrie, sont normales aux plans méridiens sur lesquels elles s'exercent et sont pareilles dans tous les plans méridiens. Examinons-les donc d'abord dans le méridien principal.

Soit $aba'b'$ un élément de la section méridienne comprise entre les deux normales infiniment voisines ab et $a'b'$.

Je dis que ces forces élastiques sont uniformément réparties sur l'aire $aba'b'$ et se réduisent par suite, comme si l'épaisseur ab était infiniment petite, à une force unique appliquée au centre de gravité G de l'aire.

En effet, l'anneau fermé engendré par l'aire en question est un arc circulaire.

Par raison de symétrie, après la déformation de la coupole, cet arc reste circulaire.

Or un arc circulaire fermé qui reste circulaire ne peut pas subir de flexion, c'est-à-dire de rotations autour d'axes normaux à sa fibre moyenne; car de tels mouvements modifieraient le rayon de la fibre moyenne sans modifier sa longueur totale, ce qui est impossible.

Il ne peut pas non plus subir de torsion, c'est-à-dire de rotations autour des tangentes à sa fibre moyenne d'amplitudes variables d'une tangente à une autre; car de tels mouvements feraient naître dans la section de l'anneau des forces élastiques tangentielles, et il n'en existe pas ici.

Donc, il ne peut subir qu'un allongement ou une contrac-

tion simple de sa fibre moyenne, ce qui fait naître, dans une section transversale $aba'b'$, des forces élastiques uniformément réparties, se réduisant à une résultante unique normale au plan de la section et passant par son centre de gravité.

D'après cela, si $\delta_1 G'_0 \delta_2$ est la projection horizontale du parallèle du point G, la pression exercée sur l'élément générateur $aba'b'$ de l'anneau quand il est arrivé dans le méridien $O_0 x_1$ est, en appelant q la pression méridienne par unité de surface,

$$q' = q\varepsilon x\, ds,$$

appliquée en δ_1 normalement à $O_0 x_1$ et, de même, la pression qu'il subit quand il est arrivé dans le méridien $O_0 x_2$ est une force pareille appliquée en δ_2 normalement à $O_0 x_2$.

Ces deux forces se composent, comme il a été dit au Chapitre précédent, en une force unique horizontale située dans le plan du méridien principal, appliquée au point (G, G'_0) et égale à

$$q'\, d\theta = q\varepsilon x\, ds\, d\theta.$$

Ainsi, nous arrivons à cette conséquence :

Un onglet d'angle infiniment petit $d\theta$ d'une coupole peut être traité comme un simple arc élastique dont la fibre moyenne $G_0 G_n$ est plane, symétrique par rapport au plan de cette fibre moyenne, soumise à des forces situées dans ce plan, pourvu qu'aux forces directement appliquées à cet arc on adjoigne des forces horizontales $q\varepsilon x\, ds\, d\theta$ appliquées aux divers éléments ds de sa fibre moyenne, la force q qui représente la pression méridienne étant une fonction inconnue de la position de son point d'application.

D'après cela, soient respectivement

$$\overline{M}\, d\theta, \quad \overline{T}\, d\theta, \quad \overline{N}\, d\theta$$

la somme des moments relativement à un point G de la fibre moyenne de toutes les forces autres que celles $q'\, d\theta$ comprises entre G_0 et G ; la somme des projections de ces forces sur la normale et sur la tangente à cette courbe en G.

Le moment de flexion M, l'effort tranchant T et la compression N de la fibre moyenne seront, en appelant x, y les coordonnées

du point G, s l'arc G_0G et accentuant ces lettres pour un point intermédiaire entre G_0 et G,

$$(2)\quad \begin{cases} M = d\theta\left[\overline{M} + \int_{s_0}^{s} q'\varepsilon'(y'-y)\,ds\right] \\ \quad = d\theta\left(\overline{M} + \int_{s_0}^{s} q\varepsilon y\,ds - y\int_{s_0}^{s} q\varepsilon\,ds\right), \\ T = d\theta\left(\overline{T} - \frac{dy}{ds}\int_{s_0}^{s} q\varepsilon\,ds\right), \\ N = d\theta\left(\overline{N} + \frac{dx}{ds}\int_{s_0}^{s} q\varepsilon\,ds\right). \end{cases}$$

D'autre part, la section transversale de l'arc au point G, section que, dans la théorie des arcs, nous avons désignée par S, est

$$(3)\qquad S = \sigma = \varepsilon x\,d\theta,$$

et son moment d'inertie relativement à l'axe horizontal passant par ce point est

$$(4)\qquad I = \frac{x\,d\theta\,\varepsilon^3}{12}.$$

Par suite,

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{M}{EI} = \frac{12}{E\varepsilon^3 x}\left[\overline{M} + \int_{s_0}^{s} q'\varepsilon'(y'-y)\,ds\right] \\ \quad = \frac{12}{E\varepsilon^3 x}\left(\overline{M} + \int_{s_0} q\varepsilon y\,ds - y\int_{s_0}^{s} q\varepsilon\,ds\right), \\ \frac{T}{gES} = \frac{1}{kE\varepsilon x}\left(\overline{T} - \frac{dy}{ds}\int_{s_0}^{s} q\varepsilon\,ds\right), \\ \frac{N}{ES} = \frac{1}{E\varepsilon x}\left(\overline{N} + \frac{dx}{ds}\int_{s_0}^{s} q\varepsilon\,ds\right), \end{cases}$$

gE désignant le coefficient d'élasticité transversal et E le coefficient d'élasticité longitudinal.

La force q est une inconnue de plus que celles qui entrent dans les problèmes des arcs ordinaires. Mais il est aisé de l'exprimer en fonction de ces dernières.

En effet, si u et v désignent les composantes du déplacement

élastique d'un point G et qu'on considère de nouveau l'anneau circulaire complet engendré par une aire $aba'b'$ (*fig.* 73, p. 300) la fibre moyenne circulaire de cet anneau, qui avait d'abord un rayon égal à x, prend, par suite de la déformation élastique, un rayon $x+u$.

Donc, son allongement par unité de longueur est

$$\frac{2\varpi(x+u)-2\varpi x}{2\varpi x} \quad \text{ou} \quad \frac{u}{x}.$$

Son raccourcissement est donc

$$-\frac{u}{x}.$$

Ce raccourcissement est produit précisément par la compression q par unité de surface. Donc

(6) $$q=-\text{E}\frac{u}{x}.$$

Si, dans les équations qui précèdent, on porte cette valeur de q, qu'ensuite on porte les valeurs des premiers membres de (5) dans les équations générales du § 423, on a les éléments nécessaires pour résoudre tous les problèmes relatifs aux coupoles élastiques.

§ 544.

COUPOLE SIMPLEMENT POSÉE SUR UN PLAN HORIZONTAL. — Supposons que la coupole soumise à des forces en équilibre et d'ailleurs quelconques soit simplement appuyée sans encastrement, sur un plan horizontal passant par son parallèle inférieur OG_n.

Alors, en désignant respectivement par u_n, v_n, M_n les composantes du déplacement élastique du point G_n et le moment de flexion en ce point, les conditions à remplir sont

$$u_n=v_n=\text{M}_n=0.$$

Si le point G_0 est sur l'axe et qu'ainsi la coupole se trouve fermée à sa partie supérieure, il n'y a pas d'autre condition à remplir sur les bords. Dans le cas contraire, j'admets que sur le parallèle G_0 il n'agit aucune pression ou une pression donnée, appliquée

en G_0, de sorte que la seule condition à remplir en G_0 consiste en ce que le moment de flexion M_0 y soit nul.

En outre, on doit satisfaire aux équations de l'équilibre élastique définies au paragraphe précédent.

Le problème étant déterminé comme tous les problèmes d'élasticité, de quelque façon qu'on parvienne à remplir les conditions qui viennent d'être indiquées, on est certain que la solution obtenue sera la vraie. Or on satisfera à la condition $M_n = 0$ et à celle $M_0 = 0$, si elle existe, en supposant le moment de flexion M identiquement nul dans toute l'étendue de l'arc.

De là on conclut que l'effort tranchant

$$T = \frac{dM}{ds}$$

est aussi identiquement nul et que, par suite, les forces élastiques dans une section quelconque ab se réduisent à la compression N de la fibre moyenne, c'est-à-dire à une pression appliquée en g tangentiellement à cette ligne.

Si n est cette compression par unité de surface, on aura

$$N = n \varepsilon x \, d\theta,$$

et les conditions statiques d'équilibre relatives à une surface flexible sont de tous points applicables; elles fournissent n et q, analytiquement ou graphiquement suivant les méthodes exposées au Chapitre précédent.

D'ailleurs, les composantes u et v du déplacement élastique se réduisent à

$$u = u_0 - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N}{S}\,dx,$$

$$v = v_0 - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N}{S}\,dy,$$

où l'on remplacera $\frac{N}{ES}$ par sa valeur maintenant connue (5).

On tirera de là

$$u_n = u_0 - \frac{1}{E}\int \frac{N}{S}\,ds = 0,$$

$$v_n = v_0 - \frac{1}{E}\int \frac{N}{S}\,ds = 0,$$

les intégrales étant étendues à tout l'arc $G_0 G_n$; ces équations déterminent les déplacements u_0 et v_0, et alors les précédentes équations donnent les déplacements u et v d'un point quelconque.

On a donc ainsi satisfait à toutes les conditions du problème.

Généralement, les déplacements élastiques ne sont pas utiles à connaître, mais seulement les pressions n et q. Le problème se résout donc graphiquement comme il a été dit.

On voit par là que les formules générales de la flexion jouent ici un rôle moins important que dans les arcs. Elles ne seraient à appliquer que si les bords de la coupole étaient assujettis à d'autres conditions telles que des encastrements. Alors on pourrait appliquer la méthode exposée au paragraphe précédent. Son application générale conduirait à des calculs très complexes. Mais elle n'est guère usuelle que dans le cas où la fibre moyenne se réduit à une droite verticale ou horizontale, c'est-à-dire dans les tours rondes ou les manchons cylindriques et dans les plaques.

Nous allons montrer comment elle peut être utilisée dans ces deux cas et la marche que nous suivrons s'étendrait sans difficulté à des coupoles de forme quelconque si, dans une première approximation, comme d'ailleurs nous l'avons fait dans les arcs, on négligeait les effets de l'effort tranchant et de la compression de la fibre moyenne devant ceux de la flexion. M. Resal a résolu le problème de cette façon.

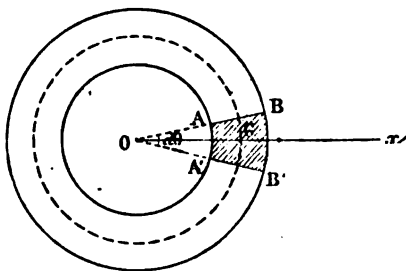
CHAPITRE XII.

ANNEAUX CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES. PLAQUES CIRCULAIRES. CHAUDIÈRES.

§ 545.

APPLICATION AU MANCHON CYLINDRIQUE. — Considérons un manchon cylindrique à axe vertical dont la section droite est formée par deux circonférences concentriques (*fig.* 74), de rayons OA et OB.

Fig. 74.



Soient a le rayon de la circonférence moyenne représentée en pointillé et ε l'épaisseur du manchon.

Nous le supposons soumis à des pressions normales aux cylindres qui le limitent, symétriques autour de l'axe et d'ailleurs quelconques.

L'onglet ABA'B' forme une poutre droite dont la fibre moyenne verticale est projetée sensiblement en G. Soient u le déplacement élastique parallèlement à OGx d'un point quelconque de cette ligne; y la distance de ce point à l'une des bases du manchon ou plus généralement à un plan horizontal fixe.

L'équation fondamentale des poutres droites devient, si nous comptons les moments positivement de gauche à droite comme les

déplacements élastiques,

(1) $$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{M}{EI}.$$

On tire de là

$$EI \frac{d^4 u}{dy^4} = \frac{d^2 M}{dy^2}.$$

Le second membre n'est autre que la charge par mètre courant de génératrice agissant sur le cylindre de section ABA'B'. On sait, en effet, que la dérivée première du moment fléchissant est égale à l'effort tranchant, et la dérivée de l'effort tranchant n'est autre que la charge par mètre courant. Cette charge se compose ici de celle donnée et de celle $q \varepsilon \, d\theta$ résultant des pressions exercées à raison de q^{kg} par unité de surface sur les méridiens AB et A'B'.

Supposons qu'il agisse une pression constante ou variable d'un point à un autre d'une même génératrice égale à p_0^{kg} par mètre carré sur le cylindre intérieur et à p_1^{kg} par mètre carré sur le cylindre extérieur.

La pression totale qui agit sur l'unité de longueur du cylindre est

$$\frac{d^2 M}{dy^2} = p_0 a \, d\theta - p_1 (a + \varepsilon) \, d\theta + q \varepsilon \, d\theta,$$

où p_0, p_1 sont des fonctions données de y. Par suite, comme le moment d'inertie I de la section ABA'B' est approximativement

$$I = \frac{a \varepsilon^3}{12} d\theta,$$

on aura

(3) $$\frac{d^4 u}{dy^4} = \frac{12}{E \varepsilon^3 a} [p_0 a - p_1 (a + \varepsilon) + q \varepsilon],$$

ou, en remplaçant q par sa valeur (6) du § 543,

$$\frac{d^4 u}{dy^4} = \frac{12}{E \varepsilon^3 a} [p_0 a - p_1 (a + \varepsilon)] - \frac{12 u}{\varepsilon^2 a^2}$$

ou

(4) $$\frac{d^4 u}{dy^4} + \frac{12}{\varepsilon^2 a^2} u = \frac{12}{E \varepsilon^3 a} [p_0 a - p_1 (a + \varepsilon)],$$

qui fournit le déplacement u avec quatre constantes arbitraires qu'on déterminera par les conditions aux extrémités du cylindre.

Ayant u, on trouvera

$$(5) \qquad q = -E\frac{u}{a},$$

pour la pression méridienne en chaque point; puis le moment de flexion

$$M = EI\frac{d^2u}{dy^2}$$

ou

$$(6) \qquad M = \frac{Ea\varepsilon^3}{12}d\theta\frac{d^2u}{dy^2}.$$

§ 546.

CHAUDIÈRE CYLINDRIQUE A FONDS PLATS. — Supposons une chaudière cylindrique soumise à une pression uniforme p_0 de l'intérieur vers l'extérieur et terminée par des fonds plats.

Nous regardons les deux extrémités de cette chaudière comme assemblées sans encastrement avec les fonds plats sur tout leur pourtour.

Soit l la longueur de la chaudière.

Comptons les y à partir de la section équidistante des bases, en sorte que, pour $y = \pm\frac{l}{2}$, on a

$$u = 0 \qquad \text{et} \qquad M = 0.$$

D'ailleurs $p_1 = 0$, $p_0 = \text{const.}$

L'équation à intégrer est

$$(7) \qquad \frac{d^4u}{dy^4} + \frac{12}{\varepsilon^2 a^2}u = \frac{12p_0}{E\varepsilon^3}.$$

Elle admet la solution particulière

$$(8) \qquad u = \frac{p_0 a^2}{E\varepsilon},$$

et son intégrale générale est

$$(9) \qquad u = \frac{p_0 a^2}{E\varepsilon} + e^{\alpha y}(A\cos\alpha y + A'\sin\alpha y) + e^{-\alpha y}(B\cos\alpha y + B'\sin\alpha y),$$

en posant, pour abréger,

$$(10)\qquad \alpha = \sqrt[4]{\frac{3}{\varepsilon^2 a^2}},$$

désignant par A, B, A′, B′ des constantes arbitraires et par e la base des logarithmes népériens, en sorte que

$$e = 2.7182818.$$

Il est évident que u ne change pas si l'on change y en $-y$; ce qui exige que

$$A = B, \qquad A' = -B'.$$

Il résulte de là, en désignant par A_0 et B_0 deux nouvelles constantes et posant

$$(10\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}}{2} = \operatorname{Cos} \alpha y, \\ \dfrac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2} = \operatorname{Sin} \alpha y, \end{cases}$$

c'est-à-dire en désignant par Cos et Sin des cosinus et sinus hyperboliques,

$$(11)\qquad u = \frac{p_0 a^2}{E\varepsilon} + A_0 \operatorname{Cos}\alpha y \cos\alpha y + B_0 \operatorname{Sin}\alpha y \sin\alpha y.$$

Pour $y = \pm \frac{l}{2}$, on doit avoir

$$u = 0 \qquad \text{et} \qquad M = 0$$

soit $u = 0$, $\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$. Or

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 2\alpha^2(-A_0 \operatorname{Sin}\alpha y \sin\alpha y + B_0 \operatorname{Cos}\alpha y \cos\alpha y).$$

Donc

$$\frac{p_0 a^2}{E\varepsilon} + A_0 \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha l \cos\frac{1}{2}\alpha l + B_0 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha l \sin\frac{1}{2}\alpha l = 0,$$

$$-A_0 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha l \sin\frac{1}{2}\alpha l + B_0 \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha l \cos\frac{1}{2}\alpha l = 0;$$

d'où

$$(12)\qquad \begin{cases} A_0 = -\dfrac{p_0 a^2}{E\varepsilon}\,\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha l \cos\frac{1}{2}\alpha l}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha l \sin^2\frac{1}{2}\alpha l + \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\alpha l \cos^2\frac{1}{2}\alpha l}, \\ B_0 = -\dfrac{p_0 a^2}{E\varepsilon}\,\dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha l \sin\frac{1}{2}\alpha l}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha l \sin^2\frac{1}{2}\alpha l + \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\alpha l \cos^2\frac{1}{2}\alpha l}. \end{cases}$$

A cause des formules

$$\sin^2\frac{1}{2}\alpha l = 1 - \cos^2\frac{1}{2}\alpha l,$$

$$\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha l = \mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\alpha l - 1,$$

le dénominateur se réduit à

$$\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\alpha l - \sin^2\frac{1}{2}\alpha l = \frac{1}{2}(\mathrm{Cos}\,\alpha l + \sin\alpha l);$$

par suite

$$A_0 = -\frac{2p_0a^2}{E\varepsilon}\,\frac{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}\alpha l\cos\frac{1}{2}\alpha l}{\mathrm{Cos}\,\alpha l + \sin\alpha l},$$

$$B_0 = -\frac{2p_0a^2}{E\varepsilon}\,\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}\alpha l\sin\frac{1}{2}\alpha l}{\mathrm{Cos}\,\alpha l + \sin\alpha l}.$$

Connaissant A_0 et B_0, l'équation (11) donne u. Par suite, on a la pression méridienne

$$q = -E\frac{u}{a},$$

et le moment de flexion

$$M = EI\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{Ea\varepsilon^3}{12}d\theta \times 2\alpha^2(-A_0\,\mathrm{Sin}\,\alpha y\sin\alpha y + B_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha y\cos\alpha y).$$

Dans la section du milieu, soit pour $y = 0$, on a

$$q = \frac{p_0a}{\varepsilon} + \frac{EA_0}{a},$$

$$M = \frac{Ea\varepsilon^3\alpha^2}{6}d\theta\,B_0.$$

La tension maxima, c'est-à-dire celle de la fibre la plus éloignée de la fibre moyenne, est

$$\frac{M\varepsilon}{2I} = \frac{6M}{a\,d\theta\,\varepsilon^2} = E\varepsilon\alpha^2B_0,$$

soit

$$2p_0a^2\alpha^2\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}\alpha l\sin\frac{1}{2}\alpha l}{\mathrm{Cos}\,\alpha l + \cos\alpha l} = \frac{2\sqrt{3}p_0a}{\varepsilon}\,\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}\alpha l\sin\frac{1}{2}\alpha l}{\mathrm{Cos}\,\alpha l + \cos\alpha l}.$$

A cette tension on doit ajouter la traction longitudinale produite sur chaque génératrice par la pression p_0 qui s'exerce sur

les deux fonds de la chaudière. Cette pression totale est

$$p_0 \varpi \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

ou sensiblement

$$p_0 \varpi a^2.$$

La section de la chaudière étant sensiblement

$$2 \varpi a \varepsilon,$$

la traction par unité de surface est

$$\frac{p_0 a}{2\varepsilon},$$

de sorte que la traction maxima totale est

$$\frac{p_0 a}{2\varepsilon}\left(1 + 4\sqrt{3}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha l \sin\frac{1}{2}\alpha l}{\operatorname{Cos}\alpha l + \cos\alpha l}\right).$$

L'effort tranchant T en un point quelconque se déduirait du moment de flexion M par la formule ordinaire

$$T = -\frac{dM}{dy}.$$

Pour $y = \pm\frac{l}{2}$, la valeur absolue de T représente les réactions des appuis.

On a donc

$$T = -\frac{E a \varepsilon^3 \alpha^3 d\theta}{6}\Big[(-A_0 + B_0)\cos\alpha y \operatorname{Sin}\alpha y - (A_0 + B_0)\sin\alpha y \operatorname{Cos}\alpha y\Big]$$

et, pour $y = \pm\frac{l}{2}$,

$$T_{\frac{l}{2}} = \pm\frac{E a \varepsilon^3 \alpha^3 d\theta}{6}\left[(B_0 - A_0)\cos\frac{1}{2}\alpha l \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha l + (B_0 + A_0)\sin\frac{1}{2}\alpha l \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha l\right],$$

ou, en remplaçant A_0 et B_0 par leurs valeurs (12),

$$T_{\frac{l}{2}} = \frac{p a^3 \alpha^3 \varepsilon^2 d\theta}{6}\,\frac{\operatorname{Sin}\alpha l \cos\alpha l - \operatorname{Cos}\alpha l \sin\alpha l}{\operatorname{Cos}\alpha l + \sin\alpha l}.$$

Donc, si P est la traction par unité de surface exercée par la partie cylindrique sur la circonférence des fonds de la chaudière

et si ε_0 est l'épaisseur d'un fond, l'action sur l'élément de surface $\varepsilon_0 a\, d\theta$ sera

$$P \varepsilon_0 a\, d\theta,$$

en sorte que

$$P \varepsilon_0 a\, d\theta = T_{\frac{l}{2}},$$

d'où

$$P = \frac{p_0 \varepsilon^2 \alpha^3 a^2}{6 \varepsilon_0} \; \frac{\operatorname{Sin} \alpha l \cos \alpha l - \operatorname{Cos} \alpha l \sin \alpha l}{\operatorname{Cos} \alpha l + \sin \alpha l}.$$

§ 547.

FLEXION D'UNE PLAQUE CIRCULAIRE. — Considérons une plaque circulaire pleine ou plus généralement évidée représentée en coupe et en projection horizontale sur la (*fig.* 75 p. 315).

Nous la supposons soumise à une pression verticale descendante p, symétrique autour du point O, mais pouvant être variable d'un point à un autre du même rayon.

Elle fléchira, sans s'allonger ou se raccourcir sensiblement dans le sens horizontal.

Si donc nous considérons un secteur ABA′B′, les pressions méridiennes q sont nulles, en vertu de la formule (6) du § 543, puisqu'on a ici $u = 0$. Par suite, ce secteur peut être considéré comme une poutre de section variable.

Si l'on appelle v l'abaissement vertical d'un point (G, G′) de sa fibre moyenne placé à une distance $OG = x$ du centre, on aura, en comptant les moments positivement de gauche à droite, à appliquer la formule habituelle des poutres droites

$$(18) \qquad EI \frac{d^2 v}{dx^2} = - M.$$

Soit ε_0 l'épaisseur de la plaque, la section transversale de la poutre en G est un rectangle de hauteur ε_0 et de base $x\, d\theta$. Son moment d'inertie est

$$(19) \qquad I = x\, d\theta \frac{\varepsilon_0^3}{12}.$$

Le moment de flexion M est, à une fonction linéaire près de x, la somme des moments des forces directement appliquées entre

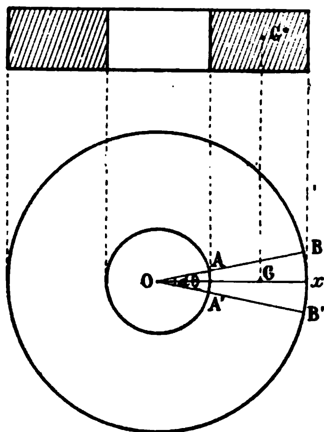
l'extrémité gauche de la poutre et le point G. Cette somme est

$$d\theta \int_{x_0}^{x} p'(x'-x)x'\,dx'.$$

Donc, en appelant

$$-d\theta(\mathrm{A}x+\mathrm{B})$$

Fig. 75.



la fonction linéaire à ajouter, on aura

$$\frac{\mathrm{E}\varepsilon_0^3}{12}x\frac{d^2v}{dx^2}=\int p'(x-x')x'\,dx'+\mathrm{A}x+\mathrm{B}$$

ou

$$(20)\qquad \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{12}{\mathrm{E}\varepsilon_0^3}\left[\frac{1}{x}\int p'(x-x')x'\,dx'+\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{x}\right].$$

En intégrant deux fois de suite, on obtient v; les quatre constantes que comportent son expression se déterminent comme dans le cas d'une poutre ordinaire, d'après les conditions aux deux extrémités.

Supposons qu'il s'agisse d'une plaque pleine soumise à une pression uniforme $p=p_0$ et simplement appuyée sur un pourtour. On aura

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{12}{\mathrm{E}\varepsilon_0^3}\left[p_0\frac{x^2}{6}+\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{x}\right],$$

d'où

$$\frac{dv}{dx} = \frac{12}{E\varepsilon_0^3}\left(\frac{p_0 x^3}{18} + Ax + BLx + C\right),$$

(21) $$v = \frac{12}{E\varepsilon_0^3}\left(\frac{p_0 x^4}{72} + \frac{Ax^2}{2} + B(xLx - 1) + Cx + D\right).$$

Il est clair, par raison de symétrie, que la tangente à la fibre moyenne au centre de la plaque reste horizontale, soit pour $x = 0$, $\frac{dv}{dx} = 0$, ce qui exige que $B = C = 0$, d'où

(21') $$v = \frac{12}{E\varepsilon_0^3}\left(\frac{p_0 x^4}{72} + \frac{Ax^2}{2} + D\right).$$

Soit a le rayon de la plaque. Pour $x = a$, on doit avoir

$$v = 0 \quad \text{et} \quad M = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0,$$

soit

$$\frac{p_0 a^4}{72} + \frac{Aa^2}{2} + D = 0$$

et

$$\frac{p_0 a^2}{6} + A = 0.$$

On tire de là

$$A = -\frac{p_0 a^2}{6},$$

$$D = \frac{5 p_0 a^4}{72};$$

d'où

$$v = \frac{12 p_0}{E\varepsilon_0^3}\left(\frac{x^4}{72} - \frac{a^2 x^2}{12} + \frac{5a^4}{72}\right)$$

ou

$$v = \frac{p_0}{6E\varepsilon_0^3}(x^4 - 6a^2x^2 + 5a^3),$$

(22) $$v = \frac{p_0}{6E\varepsilon_0^3}(a - x)(5a^3 + 5a^2x - ax^2 - x^3),$$

Le moment de flexion est

$$M = -EI\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{Ex\,d\theta\,\varepsilon_0^3}{12}$$

ou

(23) $$M = -\frac{p_0 x\,d\theta}{6}(x^2 - a^2).$$

La tension à la surface de la plaque, en un point placé à la distance x du centre, est

$$\frac{M\varepsilon_0}{2I} = -\frac{E\varepsilon_0 \frac{d^2 v}{dx^2}}{2},$$

soit

(24) $$-\frac{p_0}{\varepsilon_0^2}(x^2 - a^2) = p_0 \frac{a^2 - x^2}{\varepsilon_0^2}.$$

Le maximum a lieu au centre, soit pour $x = 0$, et a pour valeur

$$p_0 \frac{a^2}{\varepsilon_0^2}.$$

C'est donc celle que ne doit pas dépasser la tension qu'on veut faire supporter à la matière employée, ce qui détermine l'épaisseur ε_0.

§ 548.

TENSIONS D'UNE PLAQUE ET D'UN MANCHON CIRCULAIRE. — Supposons toujours une plaque circulaire (*fig.* 75, p. 315) pleine ou, plus généralement, évidée. Supposons que, sur son pourtour intérieur, on produise une pression p_0 par unité de surface et, sur son pourtour extérieur, une pression p_1 par unité de surface.

Soient respectivement a_0 et a_1 les rayons de ces deux circonférences.

Si nous considérons le secteur compris entre deux plans méridiens, il forme une poutre qui ne supporte qu'une traction ou une compression simple. Si u est le déplacement élastique suivant Ox du point G placé à la distance x du centre et $\frac{N}{S}$ la compression par unité de surface de l'axe d'une pièce simplement comprimée, on a

$$u = u_0 - \frac{1}{E}\int_{a_0}^{x} \frac{N}{S} dx;$$

d'où

(a) $$\frac{du}{dx} = -\frac{N}{ES}$$

ou, comme la section est

$$S = \varepsilon_0 x \, d\theta,$$

on a

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{E\varepsilon_0\,d\theta}\,\frac{N}{x},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx\dfrac{du}{dx}}{dx} = -\frac{1}{E\varepsilon_0\,d\theta}\,\frac{dN}{dx}.$$

Mais la compression N se compose, par définition :

1° De la pression exercée sur l'extrémité gauche de la poutre, laquelle est $p_0 a_0 \varepsilon_0\, d\theta$;

2° De la somme des projections sur Ox, des pressions méridiennes q agissant entre l'extrémité gauche de la poutre et le point considéré.

Donc

$$N = p_0 a_0 \varepsilon_0\, d\theta + \varepsilon_0\, d\theta \int_{a_0}^{x} q\, dx,$$

d'où

$$\frac{dN}{dx} = \varepsilon_0\, d\theta\, q.$$

Par suite, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{dx\dfrac{du}{dx}}{dx} = -\frac{q}{E}.$$

On a d'ailleurs (§ 543)

$$q = -\frac{Eu}{x},$$

d'où

$$\frac{dx\dfrac{du}{dx}}{dx} = \frac{u}{x},$$

équation différentielle linéaire du second ordre en u.

On vérifie sans difficulté qu'elle admet les deux solutions particulières

$$u = x, \qquad u = \frac{1}{x}.$$

Donc son intégrale générale est

$$u = Ax + \frac{B}{x}.$$

Par suite,

$$q = -\mathrm{E}\frac{u}{x} = -\mathrm{E}\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{x^2}\right)$$

est la pression méridienne.

La pression par unité de surface sur la section transversale de la poutre est $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}}$; nous la désignerons par la lettre n, en sorte que

$$n = -\mathrm{E}\frac{du}{dx} = -\mathrm{E}\left(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}}{x^2}\right).$$

Or, pour $x = a_0$, on a

$$n = p_0;$$

pour $x = a_1$,

$$n = p_1,$$

ce qui donne entre les deux constantes A et B les deux équations

$$p_0 = -\mathrm{E}\left(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}}{a_0^2}\right),$$

$$p_1 = -\mathrm{E}\left(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}}{a_1^2}\right);$$

d'où

$$\mathrm{A} = -\frac{p_0 a_0^2 - p_1 a_1^2}{\mathrm{E}(a^2 - a_0^2)},$$

$$\mathrm{B} = \frac{(p_0 - p_1) a_1^2 a_0^2}{\mathrm{E}(a_1^2 - a_0^2)}.$$

Portant ces valeurs dans u, q, $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}}$ ou n, on aura le déplacement élastique et les pressions par unité de surface, à savoir

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}(a_1^2 - a_0^2)u &= (p_0 a_0^2 - p_1 a_1^2)x + (p_0 - p_1)\frac{a_1^2 a_0^2}{x}, \\ q(a_1^2 - a_0^2) &= p_1 a_1^2 - p_0 a_0^2 - (p_0 - p_1)\frac{a_1^2 a_0^2}{x^2}, \\ n(a_1^2 - a_0^2) &= p_1 a_1^2 - p_0 a_0^2 + (p_0 - p_1)\frac{a_1^2 a_0^2}{x^2}. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs extrêmes des pressions ont lieu pour $x = a_0$ ou $x = a_1$, soit sur le pourtour de la plaque.

Si la plaque est pleine, on a

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad q = n = p_1 = \text{const.},$$

ce qu'il était aisé de prévoir. La plaque est également pressée ou tendue dans toutes les directions.

Si la plaque est évidée, que la pression sur la circonférence intérieure soit la plus grande et si, en outre, $p_0 a_0^2 > p_1 a_1^2$, q est négatif, c'est-à-dire représente une tension t; sa plus grande valeur absolue a lieu pour $x = a_0$, soit sur la circonférence intérieure, et a pour valeur

$$-q = t = \frac{p_0 a_0^2 - p_1 a_1^2 + (p_0 - p_1) a_1^2}{a_1^2 - a_0^2}.$$

Remarque. — Si la différence $a_1 - a_0 = \varepsilon$, représentant l'épaisseur de la chaudière, est considérée comme infiniment petite, et que a désigne le rayon du cylindre moyen, on a

$$q = \frac{(p_1 - p_0 a)}{\varepsilon}$$

ou

$$-q = t = -\frac{(p_0 - p_1) a}{\varepsilon},$$

pour la pression méridienne q ou la tension méridienne $-q = t$, suivant que la plus grande pression a lieu vers le dehors ou vers le dedans. Ces dernières formules sont faciles à établir directement en coupant la chaudière par un plan diamétral et écrivant qu'il y a équilibre entre les tensions (ou pressions) dans les parties coupées et la pression exercée sur le demi-pourtour de la chaudière.

§ 549.

SUR LES CHAUDIÈRES CYLINDRIQUES A FONDS PLATS. — Dans une chaudière à fonds plats soumise à une pression intérieure p_0, par exemple, nous avons vu comment on trouve la tension maxima dans le corps de la chaudière.

Sur chaque fond d'épaisseur ε_0, la tension maxima due à la flexion est, comme nous l'avons vu,

$$p_0 \frac{a^2}{\varepsilon_0^2},$$

si le rayon de la chaudière est a et l'épaisseur du fond plat ε_0.

A cette tension, il faut ajouter celle P que produit la liaison de

la chaudière avec le fond et qui est fournie par la dernière équation du § 546.

Nous avons supposé la chaudière reliée aux fonds plats sans encastrement.

Si l'on supposait que la liaison eût lieu avec encastrement :

1° Dans l'étude du manchon cylindrique (§ 545), au lieu d'exprimer que, pour $y = \pm \frac{l}{2}$, on a $u = 0$ et $M = 0$, on écrirait que pour ces valeurs on a $u = 0$ et $M = M_0$, M_0 étant le moment de flexion inconnu au point d'encastrement;

2° De même, dans l'étude de la flexion du fond plat, on exprimerait que, pour $x = a_1$, $M = M_0$;

3° Cette grandeur M_0 constituerait une inconnue de plus que dans le problème tel qu'il a été posé. Pour la trouver, on aurait à exprimer que l'angle dont a tourné une génératrice du pourtour du fond est le même que celui dont a tourné l'extrémité de la fibre moyenne de la chaudière. Le premier de ces angles est, d'après les notations employées dans le problème du fond, la valeur absolue que prend $\frac{dv}{dx}$ pour $x = a_1$; le second est la valeur absolue de $\frac{du}{dy}$ $\left(\text{notations employées pour le manchon cylindrique, pour } y = \frac{l}{2}\right)$.

En égalant ces deux valeurs, on aurait l'équation nécessaire pour déterminer le moment de flexion M_0 à la jonction de la chaudière et des fonds.

§ 550.

CHAUDIÈRES SPHÉRIQUES. — Considérons (*fig.* 76, p. 322) une enveloppe métallique comprise entre deux sphères concentriques. Soient a le rayon de la sphère moyenne entre les deux et ε_0 leur écartement, c'est-à-dire l'épaisseur de la chaudière que nous supposerons d'abord infiniment petite.

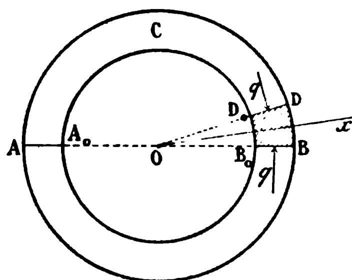
Soit p_0 la pression supposée intérieure, pour fixer les idées, que supporte cette enveloppe.

Il est clair que celle-ci sera également tendue dans tous les sens. Pour avoir la tension que nous appellerons t_0 par unité de surface, coupons par un plan diamétral AB. Il y a équilibre entre

la tension qui s'exerce sur le pourtour annulaire AA_0BB_0 et la pression p_0 qui s'exerce sur la demi-sphère ACB. La somme des projections des pressions p_0 sur une perpendiculaire au plan AB est égale (§ 31) à la pression qui s'exercerait sur le cercle A_0B_0, soit sensiblement

$$p_0 \varpi a^2.$$

Fig. 76.



La tension totale sur la surface annulaire AA_0BB_0 est

$$t_0 2\varpi a \varepsilon_0;$$

d'où

$$t_0 2\varpi a \varepsilon_0 = p_0 \varpi a^2$$

ou

(26) $$t_0 = \frac{p_0 a}{2\varepsilon_0}.$$

Comme la tension t_0 doit rester inférieure ou au plus égale à celle que peut supporter la matière, cette formule fournit la valeur de ε_0.

Remarque. — Si l'on considère un onglet B_0BD_0D, les pressions que nous avons précédemment appelées q, qui s'exercent sur ses deux faces B_0B et D_0D, sont ici négatives, puisque la sphère est partout tendue, et l'on a

(27) $$q = -t_0 = -p_0 \frac{a}{2\varepsilon_0}.$$

Si l'on appelle u_0 le déplacement élastique dans la direction du rayon moyen Ox de cet onglet (et ce déplacement est le même

dans toutes les directions), on a, comme nous savons,

$$u_0 = -\frac{1}{E} q a = \frac{p_0 a^2}{2 E \varepsilon_0}. \tag{27 bis}$$

Supposons à présent l'épaisseur ε_0 quelconque.

Admettons que la chaudière soit soumise à la pression p_0 sur sa surface intérieure et à une pression p_1 sur sa surface extérieure.

Concevons (*fig.* 76, p. 322) un cône ODB dont la base DB soit une courbe fermée de dimensions infiniment petites et de forme d'ailleurs quelconque, tracée sur la surface de la sphère extérieure. Coupons ce cône infiniment délié par trois sphères concentriques aux sphères données, à savoir : l'une de rayon unité, non représentée sur la figure, les autres ab et $a'b'$ de rayon x et $x + dx$. Soit σ l'aire de la section faite dans le cône par la première sphère ; les aires des sections faites par les deux autres seront respectivement

$$\sigma x^2, \quad \sigma(x + dx)^2.$$

Le solide $aba'b'$ est en équilibre sous l'influence des pressions exercées sur ses bases ab et $a'b'$ d'une part et sur sa surface latérale $bb'aa'$ d'autre part. La somme des projections de toutes ces forces sur un axe Ox placé à l'intérieur du cône est donc nulle.

Soit n la pression par unité de surface exercée sur la base ab. La pression totale exercée sur cette base est

$$n x^2 \sigma.$$

Celle exercée sur $a'b'$ est

$$-\sigma\left(n x^2 + \frac{d n x^2}{dx} dx\right),$$

de sorte que la pression totale sur les deux bases est

$$-\sigma \frac{d n x^2}{dx} dx.$$

Soit q la pression méridienne par unité de surface à la distance x du centre O des sphères.

La somme des projections sur Ox de la pression uniforme q exercée sur la surface latérale $aa'bb'$ s'obtient (§ 31) en multipliant q par la projection de cette surface sur un plan perpendi-

culaire à Ox. Or cette projection est égale à la différence des bases $a'b'$ et ab, soit

$$\sigma[(x+dx)^2-x^2]=2\sigma x\,dx.$$

Donc on a

$$-\sigma\frac{dnx^2}{dx}dx+2\sigma q x\,dx=0$$

ou

$$\frac{dnx^2}{dx}=2qx.$$

Or, si u est le déplacement élastique, suivant Ox, d'un point de ab, on aura

$$n=-\mathrm{E}\frac{du}{dx},\qquad q=-\mathrm{E}\frac{u}{x},$$

d'où

$$\frac{dx^2\dfrac{du}{dx}}{dx}=2u,$$

équation différentielle dont l'intégrale générale est

$$u=\mathrm{A}x+\frac{\mathrm{B}}{x^2},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On en déduit

$$n=-\mathrm{E}\left(\mathrm{A}-\frac{2\mathrm{B}}{x^3}\right),$$

$$q=-\mathrm{E}\left(\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{x^3}\right).$$

Soient, pour abréger,

$$a_0=a-\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{et}\qquad a_1=a+\frac{\varepsilon}{2}$$

les rayons des deux sphères qui limitent la chaudière.

Pour $x=a_0$, $x=a_1$, on a respectivement

$$n=p_0,\qquad n=p_1,$$

en sorte que

$$\mathrm{EA}-\frac{2\mathrm{EB}}{a_0^3}=-p_0,$$

$$\mathrm{EA}+\frac{2\mathrm{EB}}{a_1^3}=-p_1.$$

d'où

$$\mathrm{EA} = \frac{p_0 a_0^3 - p_1 a_1^3}{a_1^3 - a_0^3},$$

$$\mathrm{EB} = \frac{(p_0 - p_1) a_0^3 a_1^3}{2(a_1^3 - a_0^3)}$$

et

(28)
$$\begin{cases} n = \dfrac{p_1 a_1^3 - p_0 a_0^3 + (p_0 - p_1)\dfrac{a_0^3 a_1^3}{x^3}}{a_1^3 - a_0^3}, \\[2ex] q = \dfrac{p_1 a_1^3 - p_0 a_0^3 + \dfrac{p_1 - p_0}{2}\dfrac{a_0^3 a_1^3}{x^3}}{a_1^3 - a_0^3}, \\[2ex] \mathrm{E}u = \dfrac{p_0 a_0^3 - p_1 a_1^3}{a_1^3 - a_0^3}\, x + \dfrac{(p_0 - p_1) a_0^3 a_1^3}{2(a_1^3 - a_0^3)}\, \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Si $p_1 = 0$, on a

$$q = -\frac{p_0 a_0^3}{a_1^3 - a_0^3}\left(1 + \frac{a_1^3}{2x^3}\right),$$

qui représente une tension dont la valeur maxima a lieu pour $x = a_0$.

En général, le maximum de q a lieu sur une des sphères. Si

$$a_1 - a_0 = \varepsilon_0$$

est infiniment petit, on retrouve facilement la formule (27).

§ 551.

CHAUDIÈRE CYLINDRIQUE A FONDS BOMBÉS. — Une chaudière cylindrique indéfinie ne supporte pas de flexion.

La tension t suivant une de ses génératrices, si l'on regarde l'épaisseur de la chaudière comme infiniment petite, est fournie (§ 546, *Rem.*) par l'équation

(29)
$$t = \frac{pa}{\varepsilon},$$

en désignant par ε l'épaisseur de la chaudière et par a son rayon.

On a d'ailleurs (§ 548), pour la tension t_0 d'une chaudière sphérique supposée d'épaisseur ε_0, infiniment petite, de rayon a_1

et pressée du dedans vers le dehors,

$$(30) \qquad -q = t_0 = p_0 \frac{a_0}{2\varepsilon_0}.$$

Supposons, d'après cela, une chaudière cylindrique, de rayon a, d'épaisseur ε, fermée à ses deux extrémités par des fonds en forme de calottes sphériques d'épaisseur ε_0 et de rayon a_0. Pour que la chaudière cylindrique se dilate librement comme si les deux fonds n'existaient pas, il faut et il suffit que la dilatation de la circonférence de jonction soit la même, qu'on regarde cette circonférence comme appartenant à la partie cylindrique ou aux fonds sphériques.

Ceci exige que les tensions t et t_0 soient les mêmes, d'où

$$\frac{p_1 a_0}{2\varepsilon_0} = \frac{p_1 a}{\varepsilon}$$

ou

$$\frac{a_0}{\varepsilon_0} = \frac{2a}{\varepsilon}.$$

Lamé, qui a le premier traité ce problème (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences du* 18 *février* 1850, t. XXX, p. 157), trouve, en partant des principes de la théorie mathématique de l'élasticité,

$$\frac{a_0}{\varepsilon_0} = \frac{7}{3}\frac{a}{\varepsilon} = 2{,}33\frac{a}{\varepsilon}, \quad [1].$$

[1] La différence tient à ce que, des deux coefficients désignés par Lamé par les lettres λ et μ, dans les leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité, la résistance des matériaux suppose $\lambda = 0$; tandis que l'isotropie de la matière conduirait à faire $\lambda = \mu$.

NOTE I.

SUR LA DÉTERMINATION DIRECTE DES ARCS D'ÉGALE RÉSISTANCE.

I. — ARCS POSÉS SUR ROTULES.

§ 1.

SOLIDE D'ÉGALE RÉSISTANCE POUR UNE CHARGE VERTICALE SYMÉTRIQUE. — M. l'Inspecteur général des Ponts et Chaussées des Orgeries a, le premier, à notre connaissance, proposé une méthode directe et exacte pour l'étude des poutres droites d'égale résistance. Nous nous proposons d'étendre sa méthode aux arcs. Nous supposerons d'abord que l'arc considéré soit symétrique, ainsi que la charge qu'il porte.

Quelle que soit cette charge et quel que soit l'arc, le polygone des pressions passe par les deux tourillons A et B (*fig.* 77, p. 328).

La troisième condition à laquelle il est assujetti et qui sert à le déterminer résulte du théorème fondamental ou de l'équation (1) (§ 424) qui, si le coefficient d'élasticité est constant, donne

$$(1) \qquad \int_0^s \frac{M}{I} y \, ds = 0.$$

Chaque élément $\frac{M\,ds}{I}$ de cette intégrale est de même signe que le moment de flexion correspondant M. Donc, pour que l'intégrale puisse s'annuler, ce qui exige que certains éléments soient positifs et d'autres négatifs, il faut que M change de signe au moins une fois; comme tout est symétrique, il ne peut changer de signe en un point de l'arc sans en changer au point symétrique; il faut donc qu'il change de signe au moins deux fois.

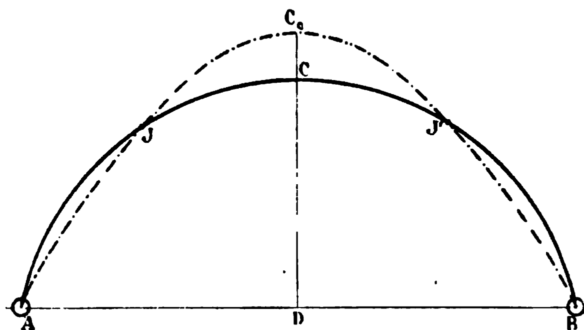
Cela équivaut à dire que la courbe des pressions, quelle qu'elle soit, doit couper l'arc non seulement en ses deux extrémités A et

B, mais encore en deux autres points J et J′ symétriquement placés par rapport au sommet C.

Admettons en premier lieu, *sauf vérification ultérieure*, qu'elle ne le coupe qu'en ces quatre points.

Cela arrivera forcément si la fibre moyenne de l'arc est une courbe du second degré et si la charge est uniforme, parce qu'alors la courbe des pressions est une parabole qui ne peut couper une autre courbe du second degré en plus de quatre points.

Fig. 77.



Soient α l'abscisse du point J comptée depuis A et σ l'arc AJ.

A cause de la symétrie de l'arc et de la charge, l'équation (1) ci-dessus peut être remplacée par celle-ci

$$\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{M}{I} y\, ds = 0$$

ou

$$\int_0^{\sigma} \frac{M}{I} y\, ds + \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{M}{I} y\, ds = 0.$$

La condition d'égale résistance est

$$\frac{Mu}{I} = \pm R,$$

u étant la distance donnée, constante ou variable, d'une section à une autre, de la fibre moyenne à la fibre extrême (*intrados* ou *ex-*

trados) la plus éloignée de la fibre moyenne. Le signe du second membre doit être le même que celui de M. Et, comme M change de signe en J et n'a, par hypothèse, pas d'autre changement de signe entre A et C, si l'on tire $\frac{M}{I}$ de la dernière équation et qu'on la porte dans l'avant-dernière, celle-ci devient

$$(2) \qquad \int_0^\sigma \frac{y}{u}\,ds = \int_\sigma^{\frac{s}{2}} \frac{y}{u}\,ds.$$

A la place de la distance u de la fibre moyenne à la fibre la plus éloignée, on peut introduire la hauteur totale h de l'arc, qui est, en général, proportionnelle à u, de sorte que l'équation devient

$$(2') \qquad \int_0^\sigma \frac{y}{h}\,ds = \int_\sigma^{\frac{s}{2}} \frac{y}{h}\,ds.$$

Si la hauteur de l'arc est constante, le facteur $\frac{1}{h}$ sort des signes d'intégration et disparaît de l'équation.

Cette équation fournit la valeur de σ, c'est-à-dire la position du point J par où doit nécessairement passer la courbe funiculaire des charges, quelles qu'elles soient. Cette courbe devant ainsi passer par trois points A, B, J est déterminée et l'on peut la tracer (§ 45). Sa distance polaire mesurée à l'échelle des forces représentera la poussée, et les portions d'ordonnées comprises entre elle et la fibre moyenne, multipliées par cette distance polaire, donneront les moments de flexion. Ceux-ci connus, les moments d'inertie des diverses sections s'ensuivront par la condition d'égale résistance.

On voit par là que toute la difficulté consiste à résoudre l'équation (2) ou (2′) qui définit la position du point J.

§ 2.

APPLICATION A UN ARC CIRCULAIRE DE HAUTEUR CONSTANTE. — S'il s'agit d'un arc circulaire de hauteur constante, on peut la résoudre analytiquement.

Soient θ_0 le demi-angle d'ouverture de l'arc et ε l'angle du rayon qui aboutit au point J avec la verticale.

L'équation générale (2) devient ici

$$\int_0^{\sigma} y\,ds = \int_0^{\frac{s}{2}} y\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} y\,ds.$$

Or, si R est le rayon de l'arc, θ l'angle polaire compté depuis la verticale, on aura

$$y = \mathrm{R}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$
$$ds = \mathrm{R}\,d\theta.$$

Donc l'équation à satisfaire devient

$$\int_0^{\varepsilon} (\cos\theta_0 - \cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} (\cos\theta_0 - \cos\theta)\,d\theta$$

ou

$$\varepsilon\cos\theta_0 - \sin\varepsilon = \frac{1}{2}(\theta_0\cos\theta_0 - \sin\theta_0).$$

$$\varepsilon - \frac{1}{\cos\theta_0}\sin\varepsilon = \frac{1}{2}(\theta_0 - \operatorname{tang}\theta_0).$$

On a d'ailleurs, f et l étant respectivement la flèche et l'ouverture de l'arc,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_0 = \frac{2f}{l},$$

$$\operatorname{tang}\theta_0 = \frac{4fl}{l^2 - 4f^2},$$

de sorte que, pour chaque surbaissement donné, on connaît θ_0 et l'on en peut conclure ε. On pourrait aisément former une table à simple entrée fournissant ainsi, pour chaque surbaissement, la position du point J.

Mais il est rare que, dans la pratique, on ait des fibres moyennes exactement circulaires et des arcs de hauteur constante, de sorte que les Tables de ce genre n'ont pas tout à fait l'utilité qu'on serait tenté de leur attribuer.

Nous allons indiquer, par un exemple, une solution graphique générale du problème, quelles que soient la forme de la fibre moyenne et les variations de hauteur de l'arc.

§ 3.

APPLICATION A L'ARC DU PONT DU DOURO A PORTO (¹). — Cet arc (*fig.* A, *Pl. XXXVI*), de forme circulaire, a 160^m de portée, $37^m,50$ de flèche à l'intrados, 10^m de hauteur à la clef. Il repose sur deux culées en maçonnerie par de simples rotules, de façon à éviter tout encastrement.

Il porte une poutre supérieure reposant sur deux piles-culées b et b' fondées sur le sol et sur des palées a, a', α, α' s'appuyant sur l'arc lui-même.

Cette poutre est continue; mais, pour ne pas compliquer la question spéciale que nous avons en vue d'un problème étranger, nous la considérerons (cette disposition qui, en réalité, nous semble meilleure, a été, depuis, adoptée pour le viaduc de Garabit sur la ligne de Marvejols à Neussargues, lequel a 165^m de portée et 60^m de flèche) comme coupée au droit des palées a, a', α, α'. Nous regarderons la partie centrale $\alpha\alpha'$ de $53^m,188$ de longueur comme faisant corps avec l'arc; les parties $a\alpha$, $a\alpha'$, de $28^m,75$, comme reposant librement sur les parties a, α, a', α'; enfin les parties extrêmes ab, $a'b'$, de $28^m,75$, comme reposant de même sur les palées a, a' et les piles-culées b, b'.

L'arche tout entière qui constitue le pont se compose de deux arcs identiques.

Pour qu'ils puissent opposer plus de résistance au vent, ils sont placés dans deux plans inclinés par rapport au plan vertical passant par l'axe de la voie, de telle sorte que leur écartement de 15^m aux naissances n'est plus que de $3^m,95$ dans l'axe des membranes supérieures.

Chaque arc est formé de panneaux à croix de Saint-André et montants verticaux.

(¹) Ce magnifique ouvrage, récemment établi sur le Douro, à Porto, est dû, comme on sait, à deux constructeurs français, MM. Eiffel et Seyrig. Les chiffres que nous donnons relativement à cet Ouvrage sont empruntés à une remarquable Note de M. Seyrig.

Supposons chaque arc soumis :

1° A une charge permanente $p = 3000$ tonnes par mètre courant;

2° A une surcharge d'épreuve $p' = 1500$ tonnes par mètre courant régnant sur tout l'arc, d'où $p' = \frac{p}{2}$. Et, si $p'' = p + p'$ est la charge totale, on a

$$p'' = \frac{3}{2}p$$

ou

$$(3) \qquad p = \frac{2}{3}p'', \quad p' = \frac{1}{3}p'':$$

3° A une surcharge pareille régnant seulement sur la travée centrale des poutres supérieures;

4° A une surcharge pareille régnant sur les deux demi-travées de gauche *ba* et *aα* à partir de la culée *b*.

Je me propose de montrer comment on peut déterminer directement et rigoureusement par la condition d'égale résistance les trois polygones des pressions répondant à la charge permanente augmentée des trois modes de surcharge supposés.

En adoptant en chaque point le plus défavorable, c'est-à-dire celui qui fournit le plus grand moment de flexion en ces points et utilisant ces moments de flexion maxima pour déterminer les moments d'inertie des sections de l'arc, on sera certain que l'arc résistera aux diverses épreuves indiquées.

Si on voulait lui en faire subir d'autres, cela ne ferait que multiplier le nombre des polygones de pression à tracer; mais la méthode serait la même.

§ 4.

DÉTERMINATION DES POINTS D'INTERSECTION DE LA FIBRE MOYENNE ET DU POLYGONE DES PRESSIONS POUR UNE CHARGE SYMÉTRIQUE QUELCONQUE. — Envisageons le cas général où l'arc porterait une charge symétrique donnée quelconque et proposons-nous de le constituer *a priori*, de façon qu'il soit rigoureusement d'égale résistance relativement à cette charge.

A cet effet, divisons la fibre moyenne en un certain nombre de parties égales; nous la diviserons ici en 19 parties, ce qui est à peu près le nombre des panneaux.

Désignons (*fig.* A, *Pl. XXXVII*) les points de division par les lettres c_1, c_2, c_3, ... et b_1, b_2, b_3, ..., en allant de la clef aux naissances.

Soient

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8,\ y_9$$

les hauteurs de ces points de division au-dessus de la corde AB et

$$h_1,\ \ldots,\ h_8,\ h_9$$

les hauteurs de l'arc au droit de chacun des points de division, ces hauteurs étant mesurées normalement à la fibre moyenne sur le dessin de la *Pl. XXXVI*.

Si h est l'une quelconque de ces hauteurs et y l'ordonnée correspondante de la fibre moyenne, nous pouvons remplacer l'équation (2') approximativement par celle-ci :

$$(3) \qquad \sum_1^{\sigma} \frac{y}{h} = \sum_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{h}.$$

Pour trouver les inverses $\frac{1}{h}$ des hauteurs h ou plutôt des quantités proportionnelles à ces inverses, traçons (*fig. a, Pl. XXXVII*) deux axes rectangulaires. Sur l'un, à partir de O, portons des longueurs proportionnelles à ces hauteurs, par exemple, ces hauteurs triplées, soit $Oh_1 = 3h_1$, $Oh_2 = 3h_2$, ..., $Oh_9 = 3h_9$; sur l'autre, une longueur arbitraire OC. Par le point C, menons des perpendiculaires aux rayons Ch_1, Ch_2, ..., Ch_9, perpendiculaires que nous prolongerons jusqu'à leurs rencontres en h'_1, h'_2, h'_2, ..., h'_9 avec l'axe Ox prolongé.

Les longueurs Oh'_1, Oh'_2, ..., que nous appellerons h'_1, h'_2, ..., sont proportionnelles aux inverses de celles h. On a

$$h_i = \frac{\overline{OC}^2}{3h_i},$$

d'où

$$\frac{1}{h_i} = \frac{3}{\overline{OC}^2} h_i.$$

La dernière équation peut, par suite, s'écrire

$$(3') \qquad \sum_{1}^{\sigma} h'y = \sum_{\sigma}^{\frac{s}{2}} h'y,$$

donc si, aux points de division c_i, on suppose appliquées des forces horizontales, égales ou proportionnelles aux longueurs h'_1, h'_2, ..., h'_9 (¹).

Mais, l'arc étant surbaissé, les lignes d'action b_1c_1, b_2c_2, ... ainsi obtenues seraient trop rapprochées les unes des autres. C'est pourquoi on a doublé toutes les ordonnées y_i, ce qui donne les points c'_i et b'_i, dont les ordonnées y' sont respectivement $2y_i$. En multipliant les deux membres de (3') par 2, on obtient l'équation

$$\sum_{1}^{\sigma} h'y' = \sum_{\sigma}^{\frac{s}{2}} h'y'.$$

On appliquera les forces proportionnelles aux h'_i aux points c'_i.

Portons ces forces bout à bout sur l'horizontale DA formée par la corde.

Pour ne pas rendre ce polygone trop long, on a pris les forces égales aux h'_i divisées par 5. Construisons le polygone funiculaire de ces forces ayant le point C' pour pôle et le point D pour point de départ, de sorte que le premier côté est la verticale du point D arrêtée à la ligne d'action de la première force, c'est-à-dire à la ligne $c'_1b'_1$; le second est parallèle au rayon qui va de C' au point de division des forces $\frac{h'_1}{5}$ et $\frac{h'_2}{5}$ et s'arrête à l'horizontale $c'_2b'_2$. Les côtés suivants sont des parallèles aux autres rayons.

Soit f le point où le dernier côté coupe l'horizontale DA. On a, d'après la théorie des moments, puisque C'D est (§ 43 *bis*) la

(¹) Si l'on avait divisé l'arc en un nombre pair de parties et qu'ainsi il y eût un point de division au sommet, on y appliquerait une force proportionnellement moitié de celles appliquées aux autres points, pour tenir compte de ce que cette force ne se rapporterait qu'au demi-arc Δ placé à gauche du sommet.

distance polaire du polygone,

$$\sum_{1}^{\frac{s}{2}} h'y' = \mathrm{D}f \times \mathrm{C'D}.$$

Si, au lieu de l'équation approchée (3), on avait considéré l'équation exacte (2), le polygone serait remplacé par une courbe, à savoir la courbe funiculaire des forces horizontales $h'ds$. Supposons, pour un instant, cette courbe tracée et coupant l'horizontale AB en f. Prenons le point δ milieu de $\mathrm{D}f$; par ce point, concevons qu'on mène une tangente à la courbe funiculaire $\mathrm{C'}f$ dont il vient d'être parlé. Soit j le point de contact. Menons l'horizontale de j; elle vient couper la courbe formée par les points c'_i au point J'. Reportons ce point, par une verticale, sur la fibre moyenne en J. Je dis que c'est là le point cherché où le polygone des pressions coupe la fibre moyenne. Il coïncide ici avec le point c_5 et J' avec c'_5. En effet, la somme des moments des forces $h'ds$ comprises entre le point J' et l'extrémité A de l'arc est égale au produit

$$\mathrm{C'D} \times \delta f,$$

de sorte que, si σ est l'arc AJ, on a

$$\int_0^\sigma h'y'\,ds = \mathrm{C'D} \times \delta f.$$

De même, on a

$$\int_\sigma^{\frac{s}{2}} h'y'\,ds = \mathrm{C'D} \times \delta\mathrm{D};$$

d'où, à cause de $\delta\mathrm{D} = \delta f$,

$$\int_0^\sigma h'y'\,ds = \int_\sigma^{\frac{s}{2}} h'y'\,ds,$$

qui montre que le point obtenu satisfait bien à l'équation qu'il s'agit de résoudre.

Dans la pratique, comme nous remplaçons la courbe funiculaire $\mathrm{C}f$ par le polygone tracé, nous chercherons les deux côtés consécutifs de ce polygone qui, prolongés jusqu'à la droite DA, la coupent en deux points placés de part et d'autre de son milieu δ.

Ces côtés sont ceux qui forment le sommet du polygone portant la lettre j, de sorte que le point J qu'on en déduit est celui où passe le polygone des pressions. Il peut donc être tracé *quelle que soit la charge donnée* (pourvu qu'elle soit symétrique) relativement à laquelle on veut que l'arc considéré soit d'égale résistance, puisqu'il est assujetti à passer par les trois points A, J, B.

Sa distance polaire, évaluée à l'échelle des forces, donnera la poussée q que l'arc d'égale résistance fera naître sous l'influence de la charge considérée.

Le produit $q \times \zeta$ de cette poussée par la portion d'ordonnée ζ comprise entre le polygone funiculaire et l'arc donnera le moment de flexion M en chaque point de l'arc.

1° Tracé du polygone des pressions dans le cas d'une surcharge uniforme régnant sur tout le tablier. — Pour tracer le polygone, il faut se donner les charges. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'on ait pu déterminer le point J sans se les donner.

Nous verrons à quoi cela tient, et nous verrons aussi que ce résultat est sujet à certaines exceptions.

Supposons (*fig.* A, *Pl. XXXVI*) une charge uniforme $p'' = p + p'$ régnant sur toute la longueur du tablier.

Dans la partie centrale $\alpha\alpha'$ du tablier ayant 53^m,18 de longueur, cette charge porte directement sur l'arc, puisque nous avons admis que, dans cette partie, le tablier fait corps avec l'arc [1]. Dans la partie $a\alpha$, la charge ne porte sur l'arc que par les deux appuis a et α. Suivant la verticale α, on aura une charge

$$P_1 = \frac{a\alpha}{2} p'' = \frac{28,75}{2} p'' = 14,375 \times p''.$$

Au point a, agit une force

$$P_2 = \frac{ab + a\alpha}{2} p'' = \frac{28,75 + 28,75}{2} p'' = 28,75 p''.$$

---

[1] Nous n'avons pas sous les yeux de dessins détaillés de l'arc pour savoir dans quelle mesure cette hypothèse se rapproche de la réalité; mais cela n'importe pour l'exercice que nous avons en vue.

Soit P_0 la résultante de la charge uniforme régnant entre α et le sommet de l'arc. Cette force sera appliquée au milieu de la distance du point α au sommet et sera

$$P_0 = 26,594 p''.$$

Le polygone des pressions doit (*fig.* A, *Pl. XXXVII*) être symétrique par rapport à la verticale CD et passer par les points A et J.

Pour l'obtenir, construisons d'abord un polygone funiculaire des trois charges

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2,$$

ayant son premier côté horizontal.

A cet effet, traçons (*fig.* A_0) une verticale distante de celle du sommet de l'arc d'une longueur égale à l'ordonnée Je du point J comptée depuis la corde AB.

D'un point quelconque A_0 de cette verticale portons ces forces bout à bout.

Comme échelle des forces, convenons que la charge totale p'' par mètre sera représentée par 1^{mm}. Comme l'échelle des longueurs est aussi de 1^{mm} par mètre et que les forces P_0, P_1, P_2 sont respectivement

$$C\alpha \times p'', \quad \frac{\alpha a}{2} \times p'' \quad \text{et} \quad \frac{ab + a\alpha}{2} \times p'',$$

nous aurons à porter bout à bout les longueurs

$$C\alpha, \quad \frac{a\alpha}{2}, \quad \frac{ab + a\alpha}{2} = ab.$$

Par le point A_0, menons l'horizontale $A_0 s_0$ qui coupe la verticale du sommet en s_0.

Prenons ce point comme pôle et aussi comme point de départ d'un polygone funiculaire, de sorte que ce polygone prolongé jusqu'à la verticale de l'appui A sera $s_0 0_0 1_0 2_0 \alpha_0$. A présent, pour avoir la parabole répondant à la charge uniforme qui règne entre α et 1, il suffit de remarquer que cette courbe est tangente au côté $s_0 0_0$ en s_0 et au côté $0_0 1_0$ en 1_0; elle est donc déterminée et facile à tracer et le polygone funiculaire de distance polaire $s_0 A_0 = $ Je

des charges véritables est formé par les côtés rectilignes $\alpha_0 2_0$, $2_0 1_0$ et l'arc de parabole $1_0 s_0$.

Menons l'horizontale du point α_0 et prolongeons la verticale du point J (*fig.* A). Elle détermine (*fig.* A_0) sur le polygone funiculaire qu'on vient de tracer (peu importe qu'elle rencontre la partie curviligne ou la partie rectiligne de ce polygone; seulement, si elle rencontre la partie rectiligne, il sera inutile de tracer l'arc de parabole $1_0 s_0$) l'ordonnée $J_0 e_0$ comptée depuis l'horizontale de α_0, c'est-à-dire depuis la corde de ce polygone symétrique par rapport à la verticale de s_0.

Soit z une ordonnée quelconque du polygone des pressions comptée depuis la corde AB et z_0 l'ordonnée correspondante (ou placée sur la même verticale) du polygone funiculaire $\alpha_0 s_0$ comptée depuis l'horizontale α_0; si q et q_0 sont les distances polaires de ces deux polygones, on a (§ 43)

$$qz = q_0 z_0.$$

En particulier, si les ordonnées z et z_0 sont prises sur la verticale de J, on a

$$q \times Je = q_0 \times J_0 e_0.$$

Mais on a pris

$$q_0 = A_0 s_0 = Je.$$

Donc

$$q = J_0 e_0. \tag{4}$$

Ainsi, nous connaissons la distance polaire du polygone des pressions, c'est-à-dire la *poussée de l'arc*. C'est l'ordonnée $J_0 e_0$ mesurée à l'échelle des forces. Cette ordonnée en millimètres est

$$J_0 e_0 = 69^{mm},$$

ce qui veut dire que la poussée est

$$q = 69 \times p'' \text{ tonnes},$$

si p'' est exprimé en tonnes.

Prenons d'après cela, sur l'horizontale de s_0, une longueur $s_0 A''_0$ égale à $J_0 e_0$; reproduisons en A''_0 le polygone des forces P_0, P_1, P_2. Construisons un polygone funiculaire de ces forces ayant s_0

pour pôle, et ses côtés parallèles aux rayons polaires menés à ce nouveau polygone des forces en partant (*fig.* A) de la naissance A de l'arc. Nous aurons le polygone $A210C_0$. On devra remplacer les côtés 1.0 et OC_0 par l'arc de parabole tangent à ces lignes en 1 et C_0 et l'on aura ainsi le polygone des pressions formé par les droites A2, 2.1 et l'arc de parabole $1C_0$.

Comme vérification, ce polygone mixte devra passer par le point J.

2° Surcharge régnant sur la travée centrale aa' de l'arc. — La charge permanente p règne toujours sur toute la longueur. La surcharge p' ne règne que sur la partie centrale aa', soit (*Pl. XXXVI*) sur

$$53,188 + 2 \times 28,75 = 111^{m},38$$

de longueur. Comme le polygone des pressions est encore symétrique, nous n'en construirons toujours qu'une moitié, cette fois, celle de droite, et nous appellerons (*Pl. XXXVII*) P'_0, P'_1, P'_2 les forces analogues à celles P_0, P_1, P_2 considérées dans l'exemple précédent, c'est-à-dire la résultante de la charge uniforme sur $C\alpha'$ appliquée au milieu de $C\alpha'$, et les pressions sur α' et a'. On aura évidemment

$$P'_0 = P_0, \qquad P'_1 = P_1.$$

La force P_2 change seule et devient

$$P'_2 = \frac{ab + a\alpha}{2} \times p + \frac{a\alpha}{2} \times p' = \frac{ab}{2} \times p + \frac{a\alpha}{2} \times p''.$$

Or

$$p = 3000^{t},$$

$$p' = 1500^{t} = \frac{p}{2},$$

$$p'' = p + p' = \frac{3}{2}p$$

ou

$$p = \frac{2}{3}p'',$$

Donc

$$P'_2 = \left(\frac{ab}{3} + \frac{a\alpha}{2}\right)p'',$$

Ainsi P'_2 sera représenté par la longueur

$$\frac{ab}{3}+\frac{a\alpha}{2},$$

au lieu de l'être, comme précédemment, par $\frac{ab+a\alpha}{2}$.

Nous ferons sur ces nouvelles forces P'_0, P'_1, P'_2 la même épure que sur les anciennes. Nous obtenons ainsi un demi-polygone des pressions tracé sur la partie de droite de la figure A. Ce polygone, assujetti à passer par le point J_1 symétrique de J (§ 3), est tracé en traits et points alternés, ainsi que le polygone funiculaire $s_0\beta_0$ qui, sur la *fig.* A_0 est l'analogie de celui $s_0\alpha_0$ du cas précédent.

Remarque. — La méthode précédente repose essentiellement sur cette hypothèse que les polygones des pressions obtenus, en les supposant tracés sur toute la longueur de l'arc, ne coupent la fibre moyenne qu'aux points A, B, J, J_1. S'ils la coupaient en d'autres points, le moment de flexion changerait de signe un plus grand nombre de fois que celui supposé par l'équation (2'). Dans ce cas, il faudrait recourir à la méthode générale qui sera exposée au § 6.

§ 5.

APPLICATION A LA FERME DE LA GALERIE ANNEXE DES MACHINES AU PALAIS DE L'EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1878. — Cette ferme, dont la moitié est représentée (*fig.* A, *Pl. XXXVIII*), a 23^m,40 de portée entre les axes des piliers. La hauteur sous faîtage est 11^m,50; l'espacement des fermes est de 5^m.

Elle est formée de pieds-droits reliés aux arbalétriers par une portion d'intrados courbe qui donne à l'ensemble un aspect de grande légèreté.

On a admis une charge de 96^{kg} par mètre carré de surface couverte, soit

Ossature métallique	65^{kg}
Pannes en bois portant les voliges et voliges	33
Couverture en tuiles métalliques	8
Surcharge de neige ou de vent	40
Total	96

Comme les fermes ont 5^m d'espacement, il en résulte une charge de $p = 96 \times 5 = 480^{kg}$ par mètre courant de ferme.

Les extrémités des piliers ont été considérées comme fixées au sol par simples rotules sans encastrement.

Les calculs ont été faits avec beaucoup de soin par M. l'ingénieur de Dion.

MM. Molinos et Seyrig, dans une Notice sur M. Henri de Dion, les ont refaits, partie par le calcul, partie par les procédés graphiques, en adoptant rigoureusement les données d'exécution. Ils ont trouvé ainsi pour courbe des pressions l'arc de parabole tracé en traits pleins, tandis que M. de Dion avait trouvé celui tracé en traits discontinus et points. On voit que la différence est peu sensible.

Notre méthode donne le résultat presque à vue et en montrant qu'en effet la ferme est bien d'égale résistance.

La fibre moyenne ou lieu des milieux des hauteurs est tracée en traits discontinus et points. Nous pouvons sans erreur sensible regarder la partie de cette fibre formant le pilier comme une droite verticale Bb et la partie formant l'arbalétrier comme une droite inclinée bC.

Soit η l'ordonnée au-dessus du sol du point inconnu J où la courbe des pressions coupe la fibre moyenne.

Si

$$\mathrm{B}b + b\mathrm{J} = \sigma,$$

on aura

$$\int_0^{\sigma} \frac{y\,ds}{h} - \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{y\,ds}{h} = 0.$$

Mais, si nous négligeons l'accroissement de hauteur donné à la ferme dans le voisinage de la jonction du pied-droit et de l'arbalétrier, nous nous plaçons dans des conditions défavorables et alors nous pouvons regarder la hauteur h de la poutre formant le pied-droit comme constante et égale à h_0, et de même celle formant l'arbalétrier comme ayant une valeur sensiblement constante h_1 qu'on prendra égale à la valeur qu'elle a au milieu de l'arbalétrier.

Par suite, en appelant H_0 la hauteur du pied-droit et $\mathrm{H} = \mathrm{CD}$ la hauteur de la fibre moyenne sous faîtage, observant que, pour le pied-droit

$$ds = dy,$$

et pour l'arbalétrier

$$ds = dy \sin i,$$

i étant son inclinaison, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{1}{h_0}\int_0^{H_0} y\,dy + \frac{1}{h_1 \sin i}\int_{H_0}^{\eta} y\,dy - \frac{1}{h_1 \sin i}\int_{\eta}^{H} y\,dy = 0$$

ou

$$\frac{1}{h_0}\frac{H_0^2}{2} + \frac{1}{h_1 \sin i}\left(\frac{\eta^2 - H_0^2}{2} - \frac{H^2 - \eta^2}{2}\right) = 0;$$

d'où

$$\eta = \sqrt{\frac{H^2 + H_0^2\left(1 - \frac{h_1}{h_0}\sin i\right)}{2}}.$$

A l'échelle de la figure et en millimètres, on trouve

$$h_0 = 7^{\text{mm}},$$
$$h_1 = 6,$$
$$H_0 = 60,$$
$$H_1 = 112.$$

La demi-portée est

$$\frac{l}{2} = 117^{\text{mm}},$$

d'où

$$\sin i = \frac{H - H_0}{\frac{l}{2}} = \frac{52}{117}$$

et

$$1 - \frac{h_1}{h_0}\sin i = 1 - \frac{6 \times 52}{7 \times 117} = \frac{507}{809};$$

par suite

$$\eta = \sqrt{\frac{112^2 + 60^2 \times \frac{507}{809}}{2}} = 86^{\text{mm}}.$$

Or le tracé exact de MM. Molinos et Seyrig, établi en tenant compte des dimensions et moments d'inertie de toutes les pièces, et à l'aide des procédés très laborieux, quoique ingénieux, de M. de Dion, donne précisément, pour cette ordonnée η du point d'intersection de la parabole pleine, avec la fibre moyenne mesurée à l'échelle du dessin,

$$\eta = 86^{\text{mm}}.$$

En présence des calculs fort longs auxquels ont dû se livrer

MM. Molinos et Seyrig pour obtenir ce résultat, on reconnaîtra que notre méthode le fournit bien simplement. Ajoutons qu'elle est conforme à ce qu'exige la pratique, puisqu'elle ne consiste pas, comme celle généralement suivie, en une vérification *a posteriori* de dimensions préalablement admises. Il suffit qu'on se donne les dimensions générales de la ferme, pour que nous en déduisions le point J de la parabole funiculaire et, par suite, les éléments nécessaires à la détermination des dimensions à donner aux diverses pièces qui la composent.

En effet, ayant le point J, sachant d'ailleurs que la courbe passe par le tourillon B, que de plus son axe coïncide avec la verticale du sommet de la courbe, nous pouvons la tracer quelle que soit la charge p par mètre courant.

A cet effet, joignons les points B et J par une droite qui, prolongée, coupe la verticale du sommet ou l'axe de la courbe en un point K.

Sur BJ comme diamètre, construisons une circonférence, à laquelle nous mènerons par le point K une tangente K k. Projetons le point k en k' sur JB et k' en k'' sur la verticale de K.

D'après la théorie des polaires, la droite $k'k''$ va couper la parabole au point de contact de la tangente à la courbe menée par K; par suite, le sommet S est au milieu de k'' K.

En menant par le milieu de DB une verticale jusqu'à l'horizontale du sommet S, on obtient un point O de la tangente en B à la parabole. De même, projetant J sur la corde DB en e et menant par le milieu de De une verticale jusqu'à l'horizontale du point S, on a un point de la tangente en J. On peut donc tracer la courbe très exactement.

Ceci posé, la charge par mètre étant p, la demi-charge totale est $p\,\frac{l}{2}$.

Prenons une échelle des forces telle que p^{kg} soient représentés par 1^{cm}. Alors la demi-charge totale est représentée par DB, puisque l'échelle des longueurs est de 1^{cm} par mètre.

Inscrivons dans l'angle B_0OB une verticale de longueur DB.

Soit δ la distance mesurée en centimètres de cette verticale au point O. Pour avoir δ, il suffit de prendre OL $=$ DB et de mener l'horizontale L jusqu'à sa rencontre avec la tangente en B. Ce

sera la longueur δ. La poussée q de l'arc sera

$$q = \delta \times p = \frac{\delta}{l} P,$$

P étant la charge totale de la ferme.

Ici l'on a

$$\delta = 5,8^{cm}.$$

D'ailleurs

$$l = 23,4;$$

donc

$$q = \frac{58}{234} P,$$

et cela quelle que soit la charge P ou p.

Pour avoir le moment de flexion M en un point quelconque de la fibre moyenne, soit ζ l'ordonnée verticale exprimée en centimètres comprise entre ce point et la parabole.

On aura

$$M = q\zeta = \frac{\delta}{l} \times \zeta \times P,$$

en kilogrammètres.

On peut donc déterminer le moment d'inertie à donner à chaque section de la ferme. Si l'on a adopté ces moments et qu'on augmente ensuite aux environs du point de jonction de la ferme et de son pilier la hauteur admise dans nos calculs, la sécurité n'en sera que plus grande.

§ 6.

DÉTERMINATION DU SOLIDE D'ÉGALE RÉSISTANCE RELATIVE A UNE CHARGE QUELCONQUE SYMÉTRIQUE OU NON. — Il peut arriver, dans le cas général que nous allons traiter maintenant, que la courbe des pressions ne coupe l'arc donné qu'en un seul point J; ce point ne peut alors être que le sommet de l'arc, car on devra avoir, si AJ $= \sigma$.

$$\int_0^\sigma \frac{y}{u} ds = \int_\sigma^s \frac{y}{u} ds,$$

équation qui, à cause de la symétrie de l'arc, est satisfaite pour $\sigma = \frac{s}{2}$, et, comme nous admettons qu'il n'y a qu'un seul point J. l'équation ne doit pas admettre d'autre solution.

Le polygone des pressions devra donc, dans ce cas, passer par les deux appuis A et B et le sommet C de l'arc, ce qui le définit *a priori*, quelle que soit la charge. Mais, pour que le polygone ainsi obtenu convienne effectivement, il faut, comme le suppose la dernière équation, qu'il ne coupe l'arc en aucun autre point que ceux A, B, C. C'est ce qui n'arrivera pas en général. Cela n'arrivera jamais si la charge est symétrique; car la courbe des pressions étant alors symétrique, sa tangente en C sera horizontale comme celle de l'arc, qu'elle couperait donc au point C, en deux points confondus. Le moment de flexion ne changerait pas de signe de part et d'autre de ce point, comme il arriverait s'il était simple et comme le suppose la dernière équation.

Pour bien préciser cette circonstance, supposons qu'on veuille (*fig.* 78, p. 346) construire l'arc ACB en solide d'égale résistance pour une charge unique P. Si cette charge est placée au sommet, elle est symétrique. Il existe alors deux points symétriques J_0 et J_1 où le polygone des pressions qui ne comporte ici que deux côtés coupe l'arc, ces points se déterminant comme il a été dit aux paragraphes précédents. Si le poids P est placé très près du sommet, on conçoit qu'il doive encore exister deux points d'intersection analogues à J_0 et J_1, mais *qui ne seront plus symétriques* par rapport à C. Existe-t-il des positions du poids pour lesquelles il n'y ait qu'un seul point d'intersection qui soit le sommet C?

Pour répondre à cette question, menons les sécantes symétriques AC et BC et les tangentes à l'arc en A et B jusqu'à leurs rencontres en t et t' avec les sécantes. Je dis que, si le poids P est placé entre les verticales t et t', il y a nécessairement deux points d'intersection du polygone des pressions avec l'arc, ou deux points de l'arc où le moment de flexion change de signe, tandis qu'il n'y en a qu'un seul, si le poids est placé entre l'une des verticales t ou t' et l'appui le plus voisin.

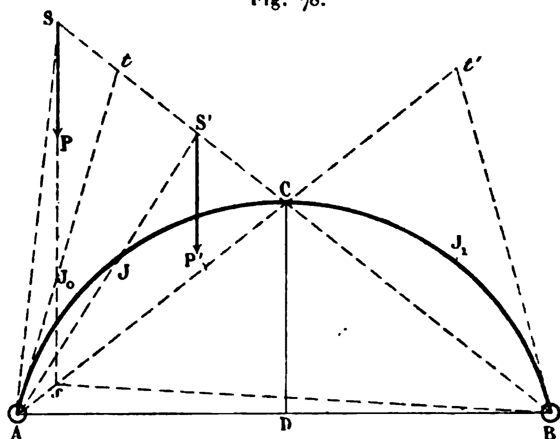
En effet, supposons, pour fixer les idées, le poids P placé à gauche du milieu de l'arc.

Quelle que soit sa position, s'il n'existe qu'un seul point d'intersection du polygone des pressions et de l'arc, nous savons que ce point ne peut être que le sommet C de l'arc. Donc l'un des deux côtés du polygone des pressions passe par le point C.

Comme ce côté doit passer par l'un des appuis, ce sera la droite BC ou celle AC.

Dans le premier cas, si S est le point d'intersection de la droite BC avec la charge, le second côté sera AS. Le polygone des pressions sera ASB. Or, pour qu'effectivement il ne coupe l'arc en aucun autre point que ceux A, B, C, il faut et il suffit que le poids P soit à gauche du point *t*.

Fig. 78.



S'il est à droite de ce point, en S', par exemple, le polygone des pressions coupe l'arc en un point J autre que C, ce qui est contre notre hypothèse.

Le cas que nous venons d'examiner est d'ailleurs le seul possible, c'est-à-dire que le côté AC ne peut pas faire partie du polygone des pressions; autrement ce polygone serait A*s*B, le point *s* étant l'intersection de AC avec la verticale de P, et il ne couperait pas du tout l'arc, ce qui est impossible, l'équation fondamentale $\int \frac{M}{I} y \, ds = 0$ exigeant que M change de signe au moins une fois.

D'une manière générale, étant donnée une charge non symétrique quelle qu'elle soit, relativement à laquelle on veut rendre l'arc ACB d'égale résistance, pour savoir si cela peut avoir lieu le polygone des pressions ne coupant l'arc qu'en un seul point, on tracera le polygone funiculaire des charges données passant par les trois points A, C, B.

S'il ne coupe l'arc en aucun autre point, ce sera le polygone des pressions répondant à l'égale résistance.

Sa distance polaire sera la poussée de l'arc. Le produit de cette poussée par l'ordonnée comprise entre le polygone et l'arc donnera le moment de flexion en chaque point, et de ce moment de flexion on déduira le moment d'inertie à donner à chaque section.

Mais supposons que le polygone funiculaire passant par A, B, C coupe l'arc en un ou plusieurs autres points. On en conclura que l'hypothèse consistant en ce que le moment de flexion ne change qu'une fois de signe ne se réalise pas et l'on doit admettre qu'il change au moins deux fois ou qu'il existe (*fig.* 79, p. 348) au moins deux points J et J_1 où le polygone des pressions coupe l'arc et où, par suite, le moment de flexion change de signe. Il s'agit de déterminer ces deux points.

Nous allons d'abord indiquer une marche qui conduirait sûrement au but, mais d'une façon un peu laborieuse. Nous montrerons ensuite, par un exemple, comment, dans la pratique, par un procédé de fausse position, le résultat peut être atteint très rapidement et avec une approximation très suffisante.

Soient σ et σ_1 les longueurs des deux arcs inconnus AJ et AJ_1. L'équation (2') du § 1 devra être remplacée par celle-ci

$$\int_0^\sigma h'y\,ds - \int_\sigma^{\sigma_1} h'y\,ds + \int_{\sigma_1}^s h'y\,ds = 0, \tag{5}$$

qui fournit une première relation entre les deux inconnues du problème.

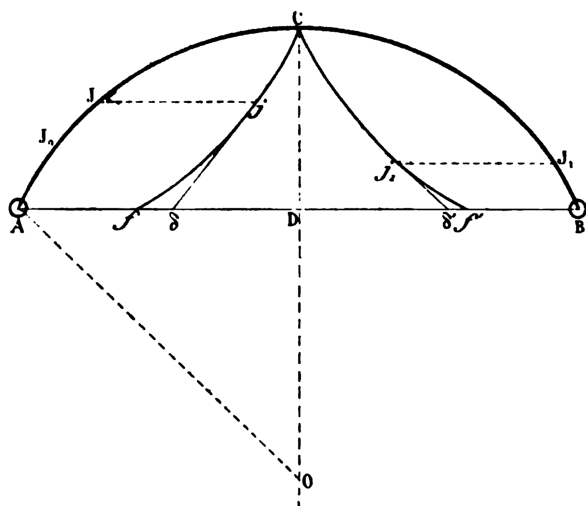
Le polygone des pressions en fournit une seconde qu'on peut obtenir avant de connaître ce polygone.

En effet, on sait que c'est un polygone funiculaire de forces données qui, par hypothèse, est assujetti à passer par les quatre points A, B, J et J_1; or, trois de ces points suffisant à le définir, il existe nécessairement une relation entre les positions des points J et J_1. Pour trouver cette relation graphiquement, traçons tous les polygones funiculaires des charges données passant par les points A et B et coupant l'arc en deux autres points.

Nous avons déjà un polygone funiculaire qui, par hypothèse, satisfait à cette condition, celui qui passe par le sommet de l'arc. Appelons (P_0) ce polygone.

Les abscisses de ses deux points d'intersection avec l'arc sont ainsi connues. L'un de ces points est le sommet C de l'arc et a pour abscisse $x = \frac{l}{2}$; soit J_0 l'autre point et $x' = x_0$ son abscisse mesurée sur l'épure et appelons O_0 le pôle (non représenté) de ce polygone.

Fig. 79.



Si par le point O_0 on mène une horizontale, on aura (§ 43) le lieu des pôles des polygones funiculaires passant par les points A et B.

Parmi ceux de ces polygones funiculaires qui coupent l'arc en deux points et deux seulement, autres que A et B, il conviendra de chercher ceux qui le coupent en deux points confondus, c'est-à-dire qui lui sont tangents sans le couper ailleurs qu'en A et B.

Comme les côtés correspondants de tous ces polygones pivotent (§ 43) autour de points fixes placés sur la droite AB et connus, puisqu'on connaît l'un des polygones, il sera facile, par un tâtonnement très rapide, de trouver les polygones dont il s'agit. Pour construire un polygone dont un côté quelconque soit tangent à l'arc, on mènera par le pivot du côté correspondant du polygone P_0 une tangente à l'arc; on aura le côté du nouveau polygone.

ce qui déterminera tous les autres côtés à l'aide de leurs pivots respectifs.

On peut ainsi tracer un polygone funiculaire dont l'un des côtés choisi arbitrairement soit tangent à l'arc.

Mais, parmi ces polygones, en aussi grand nombre que le polygone funiculaire comporte de côtés, il n'y en aura généralement que deux qui ne couperont pas l'arc en dehors des points A et B. Si O_1 et O_2 sont leurs pôles, les pôles de tous les polygones passant par A et B et coupant l'arc en deux points seulement sont, sur la droite $O_1 O_2$, entre les points O_1 et O_2; il suffira, en général, d'en tracer un ou deux au plus, ce qui, avec ceux qui sont tangents à l'arc et celui passant par le sommet, en fera connaître quatre ou cinq.

Soient, pour un quelconque d'entre eux, α et α' les abscisses des deux points d'intersection.

Pour les polygones tangents à l'arc, on aura

$$\alpha' = \alpha.$$

Traçons deux axes rectangulaires et portons les α en abscisses et les α' en ordonnées correspondantes; nous aurons une courbe que nous appellerons la courbe (α), qui figurera la relation nécessaire qui existe entre les abscisses des deux points J et J_1 appartenant à un même polygone funiculaire passant par les points A et B.

Ceci posé, concevons qu'on ait tracé (*fig.* 79, p. 349) la courbe funiculaire Cf des forces horizontales $h'\,ds$, pareille à celle tracée dans le cas des charges symétriques.

Soit Cf' sa symétrique.

Prenons sur l'arc un point J d'abscisse quelconque α et son correspondant J_1 d'abscisse α', celle-ci étant connue par la courbe (α). Menons les horizontales Jj et $J_1 j_1$ jusqu'à leurs rencontres en j et j_1 avec la courbe fCf'. Par les points j et j_1, menons les tangentes à ces courbes jusqu'à leurs rencontres en δ et δ' avec la corde AB. Mesurons la longueur

$$f\delta - \delta\delta' + \delta' f' = \beta.$$

Pour chaque valeur de l'abscisse α, portons β en ordonnée. Nous aurons une nouvelle courbe que nous appellerons la courbe (β).

La théorie des moments donne

$$\int_0^{\sigma} h'y\,ds = \mathrm{CD} \times f\delta,$$

$$\int_{\sigma}^{\sigma'} h'y\,ds = \mathrm{CD} \times \delta\delta',$$

$$\int_{\sigma}^{s} h'y\,ds = \mathrm{CD} \times \delta'f';$$

donc l'équation (5) devient

$$(5') \qquad f\delta - \delta\delta' + \delta'f' = 0$$

ou

$$\beta = 0.$$

Ainsi l'un des points cherchés J a pour abscisse celle du point d'intersection de la courbe (β) avec l'axe des abscisses.

Connaissant le point J, on peut tracer le polygone funiculaire des charges données, puisqu'il passe par ce point et les points A et B. Comme vérification, il devra passer par le point J_1, que la courbe (α) donnerait.

Ayant le polygone des pressions, on en déduit la poussée et le moment de flexion en chaque point de l'arc.

Par la condition d'égale résistance, on aura donc le moment d'inertie à donner à chaque section.

Remarque. — Si la courbe (β) ne coupait pas l'axe des abscisses, cela prouverait qu'il n'existe pas d'arc d'égale résistance relatif à la charge donnée, rencontré seulement en quatre points par le polygone des pressions. Il faudrait donc supposer que ce polygone coupe l'arc en cinq points, soit trois points J, J_1, J_2 en dehors de ceux A et B.

Cela n'arrivera guère dans la pratique.

Mais la méthode qui précède s'étendrait sans difficulté au cas général où le nombre des points d'intersection serait quelconque.

S'il est de trois, soient α, α_1, α_2 les abscisses de ces points et σ, σ_1, σ_2 les arcs AJ, AJ_1, AJ_2. L'équation (5) sera remplacée par celle-ci

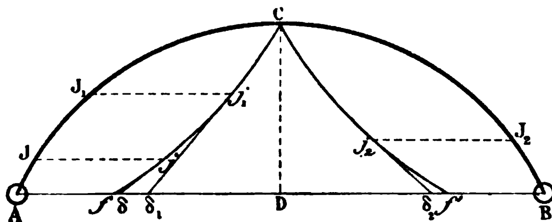
$$\int_0^{\sigma} h'y\,ds - \int_{\sigma}^{\sigma_1} h'y\,ds + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} h'y\,ds - \int_{\sigma_2}^{s} h'y\,ds = 0.$$

Si un polygone funiculaire coupe l'arc en trois points d'abscisses α, α_1, α_2 (outre les points A et B), la connaissance de l'un des points d'intersection entraîne celle des deux autres. Ainsi, à chaque valeur admise pour α répondent des valeurs déterminées de α_1 et α_2. Pour les obtenir, il suffit de tracer un certain nombre de polygones funiculaires coupant l'arc en trois points autres que A et B.

On portera les abscisses α de l'un des points d'intersection de chacun de ces polygones en abscisses sur une ligne Ox et les abscisses correspondantes α_1 et α_2 des deux autres en ordonnées; on aura une courbe (α) à deux branches.

Puis, prenant (*fig.* 80) sur l'arc un point quelconque J d'ab-

Fig. 80.



scisse α, on construira ses correspondants J_1, J_2 d'abscisses α_1 et α_2, on mènera les horizontales Jj, J_1j_1, J_2j_2 jusqu'à leurs rencontres avec les deux courbes symétriques Cf, $C'f'$.

On mènera les tangentes à ces courbes en j, j_1, j_2; elles coupent la corde aux points δ, δ_1, δ_2. On formera la longueur

$$f\delta - \delta\delta_1 + \delta_1\delta_2 - \delta_2 f' = \beta.$$

On portera sur un axe des abscisses les longueurs α et en ordonnées correspondantes les longueurs β.

On aura une nouvelle courbe que nous appelons la courbe (β). C'est l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des x qui est l'abscisse du véritable point J où le polygone des pressions coupe l'arc.

Comme vérification, ce polygone devra passer par les points J_1 et J_2 correspondants de J donnés par la courbe (α).

Si la courbe (β) ne coupait pas l'axe des x, il faudrait supposer quatre points d'intersection J, et ainsi de suite.

Nous allons voir, sur un exemple, comment cette marche se simplifie dans la pratique.

§ 7.

APPLICATION AU PONT DU DOURO. — Appliquons la méthode qui précède au troisième cas de surcharge supposé (§ 4) dans l'exemple du pont du Douro, celui où (*Pl. XXXVI, fig.* A) ce sont les deux demi-travées $a\alpha$ et ba qui portent la surcharge à partir de leur pile commune a, la charge permanente régnant toujours sur l'arc entier.

Les charges totales p'' provenant de la charge permanente p et de la surcharge

$$p' = \frac{1}{2} p,$$

d'où

$$p'' = p + p' = \frac{3}{2} p,$$

sont cette fois les suivantes :

En a et a', respectivement,

$$P_2 = \frac{ba + a\alpha}{2} p'' = ba \times p'',$$

$$P'_2 = \frac{b'a' + a'\alpha'}{2} p = \frac{ba + a\alpha}{3} p'' = \frac{2}{3} ba \times p'';$$

en α et α', respectivement,

$$P_1 = \frac{a\alpha}{2} p'',$$

$$P'_1 = \frac{a\alpha}{3} p'';$$

enfin entre α et le sommet b de l'arc C, règne la charge uniforme p'', dont la résultante appliquée au milieu de αC est

$$P_0 = \frac{1}{2} \alpha C \times p'';$$

entre C et α'; la charge uniforme $p = \frac{2}{3} p''$, dont la résultante P_0

appliquée au milieu de $C\alpha'$ est

$$P'_0 = \frac{1}{3}\alpha C p''.$$

Nous devons, d'après la marche indiquée au paragraphe précédent, tracer d'abord le polygone funiculaire des forces considérées passant par les trois points A, C, B (*Pl. XXXVII*) et, s'il ne coupe pas l'arc en un quatrième point, ce sera le polygone des pressions de l'arc supposé d'égale résistance.

A cet effet (*fig.* A_1), prenons sur la verticale CD un point quelconque s_1, menons l'horizontale $s_1 A_1 B_1$ jusqu'à ses points d'intersection en A_1 et B_1 avec les verticales menées de part et d'autre de celle s_1 et à la distance CD de celle-ci.

A partir de A_1, portons bout à bout les forces

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2,$$

représentées respectivement par

$$\frac{C\alpha}{2}, \quad \frac{a\alpha}{2}, \quad \frac{b\alpha}{2};$$

à partir de B_1, portons les forces

$$P'_0, \quad P'_1, \quad P'_2.$$

représentées respectivement par

$$\frac{C\alpha}{3}, \quad \frac{a\alpha}{3}, \quad \frac{b\alpha}{3}.$$

Menons de s_1 des rayons polaires aux points A_1, B_1 et aux points de division sur les deux verticales, puis construisons le polygone funiculaire correspondant.

Il coupera les appuis en α_1 et β_1 et sera

$$\alpha_1 2_1 1_1 o_1 s_1 o'_1 1'_1 2'_1 \beta_1,$$

le côté $o_1 s_1 o'_1$ étant horizontal; les côtés $1_1 o_1$ et $1'_1 o'_1$ sont indiqués en pointillé parce que les parties $1_1 o_1 s_1$ et $s_1 o'_1 1'_1$ sont, en réalité, à remplacer par des arcs de parabole à axe vertical tangents en 1_1, s_1, $1'_1$ aux côtés du polygone. Ce sont ces arcs qui sont tracés en lignes pleines; menons la corde $\alpha_1 \beta_1$, qui coupe la verticale s_1 en e_1.

Si d_1 est la distance polaire du polygone qu'on vient de tracer et z_1 une ordonnée quelconque comprise entre ce polygone et sa corde; si d et z sont les grandeurs analogues pour le polygone cherché passant par les points A, C, B, on a

$$z \times d = z_1 \times d_1.$$

Si l'on applique l'équation à la verticale CD, on a

$$CD \times d = s_1 e_1 \times d_1.$$

Mais $d_1 = CD$, donc

$$d = s_1 e_1.$$

Traçons donc deux nouvelles verticales de part et d'autre de celle s_1 et à la distance $s_1 e_1$; elles coupent l'horizontale s_1 en A'_1 et B'_1.

A partir de ces points, portons les polygones des forces précédemment portées à partir de A_1 et B_1; menons les rayons polaires de s_1 et construisons le polygone $\alpha'_1 s_1 \beta'_1$ correspondant, comme on a construit celui $\alpha_1 s_1 \beta_1$.

Les ordonnées comprises entre ce polygone et sa corde $\alpha'_1 \beta'_1$ étant portées à partir de AB (*fig.* A) fourniront (§ 43) le polygone cherché passant par le point C.

Dans le polygone ACB ainsi obtenu, les deux côtés compris entre les verticales C et α doivent être remplacés par l'arc de parabole tangent à ces côtés en C et α, de même pour les côtés compris entre C et α'.

Ce polygone est tracé sur la figure A en traits discontinus fins. On voit qu'il coupe l'arc non seulement aux points A, C, B, mais encore en un quatrième point g placé non loin de l'extrémité gauche A. Reportons ce point en g' sur l'arc amplifié et de là en γ, par une horizontale, sur la ligne $C'f$. Par le point γ menons une tangente à cette ligne ou plutôt, comme la courbe $C'f$ est remplacée par un polygone, prolongeons le côté de ce polygone passant par le point γ. Ce côté prolongé vient rencontrer la corde AB en δ_0.

Si le point d'intersection g n'existait pas, si le polygone ACB se trouvait extérieur à l'arc depuis A jusqu'en C et intérieur de C

en B, on aurait

$$\int_0^s h'y\,ds = \mathrm{CD} \times (f\mathrm{D} - \mathrm{D}f') = 0,$$

ce qui doit être pour que l'arc soit d'égale résistance.

Ici l'on a

$$\int_0^s h'y\,ds = \mathrm{CD} \times (-f\delta_0 + \delta_0\mathrm{D} - \mathrm{D}f') = -\mathrm{CD} \times 2f\delta_0.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^s h'y\,ds$, au lieu d'être nulle, est négative.

Comme c'est le côté Ag partant de A qui coupe l'arc, construisons un polygone funiculaire des forces données et représentées sur la figure A_1, dont le côté partant de A (*fig.* A) soit tangent à l'arc en A et qui passe toujours par le point B. On n'a marqué sur la figure que les sommets de ces polygones. Ce sont les points 2_1, 1_1, O_1, O'_1, $1'_1$, $2'_1$. Il est facile à tracer; son premier côté $A2_1$ est la tangente à l'arc en A. Le côté $2_1 1_1$ coupe la corde BA prolongée au même point que le côté correspondant du polygone ACB (§ 43). Ayant deux côtés du polygone, on a son pôle, et même, ayant un côté et sachant qu'il passe par les points A et B, on a son pôle. Car, à l'aide du polygone $\alpha_1\beta_1$ (*fig.* A_1), on trouve la résultante des forces; si l'on divise la longueur totale des polygones des forces en raison inverse des segments que cette résultante détermine sur AB, on a un point ω (non marqué); l'horizontale de ce point est le lieu des pôles des polygones passant par les points A et B (§ 45).

Connaissant ce lieu et un rayon polaire, puisque l'on connaît un côté du polygone, celui $A2_1$, on en conclut le pôle et, par suite, le polygone tout entier.

Ici il se trouve que c'est le premier côté du polygone ACB d'abord tracé qui coupe l'arc; si c'était un autre côté, par exemple le second, il suffirait de prolonger ce côté jusqu'à la ligne BA prolongée; par le point d'intersection, on mènerait une tangente à l'arc; ce serait le côté du nouveau polygone qu'on se propose de tracer. Ainsi, ce polygone $A2_1 1_1 O_1 O'_1 1'_1 2'_1$B, caractérisé par ce qu'il passe par les points A et B et par ce qu'il est tangent à l'arc par son côté correspondant au côté du polygone ACB qui coupe l'arc, est toujours facile à tracer.

Son dernier côté $2'_1 B$ (ici c'est le dernier ; dans le cas général, c'en peut être un autre) coupe l'arc en m ; reportons ce point m en m' sur l'arc amplifié, de là en μ sur la ligne $C'f'$ et menons la tangente à cette ligne en μ. Elle coupe la corde AB en δ'_0.

Ce polygone donne

$$\int_0^s h'y\,ds = \text{CD} \times (f\delta'_0 - \delta'_0 f') > 0.$$

Et forcément ce second polygone donnera toujours pour l'intégrale

$$\int_0^s h'y\,ds$$

un signe contraire à celui que lui donne le premier polygone tracé ACB.

Soit δ_v le point, analogue à ceux δ_0 et δ'_0, qui correspond au polygone des pressions vrai, c'est-à-dire au polygone qui annule l'intégrale. Ce polygone sera intermédiaire entre les deux précédents. Soit δ_1 le point δ' qui répond à son second point d'intersection avec l'arc. On aura

$$\int_0^s h'y\,ds = \text{CD}(f\delta_v - \delta_v\delta_1 + \delta_1 f') = 0,$$

d'où

$$f\delta_v - \delta_v\delta_1 + \delta_1 f' = 0.$$

Et, comme

$$f\delta_v + \delta_v\delta_1 + \delta_1 f' = 2f\text{D},$$

on en conclut

$$\delta_v\delta_1 = f\text{D}$$

ou

$$\delta_v\delta_1 - f\text{D} = 0.$$

Pour le premier polygone tracé, les points analogues à δ_v et δ_1 sont δ_0 et D. Leur distance $\delta_v\delta_1 = \delta_0\text{D}$ et ils donnent

$$\delta_v\delta_1 - f\text{D} = \delta_0\text{D} - f\text{D} = -f\delta_0 < 0;$$

pour le second, les points δ_v et δ_1 sont f et δ'_0 et ils donnent

$$\delta_v\delta_1 - f\text{D} = f\delta'_0 - f\text{D} = \text{D}\delta'_0 > 0.$$

Le point δ_v sera donc entre δ_0 et f et nous le trouverons approxi-

mativement par une interpolation proportionnelle

$$\frac{\delta_v \delta_0}{\delta_v f} = \frac{fD - \delta_0 D}{f\delta'_0 - fD} = \frac{fD - \delta_0 D}{D\delta'_0},$$

d'où

$$\frac{\delta_v f}{f\delta_0} = \frac{D\delta'_0}{fD + Df'_0 - \delta_0 D} = \frac{D\delta'_0}{f\delta_0 + D\delta'_0},$$

$$\delta_v f = \frac{D\delta'_0}{f\delta_0 + D\delta'_0} f\delta_0.$$

On a sur l'épure

$$D\delta'_0 = 41^{mm},$$

$$f\delta_0 = 7,5;$$

d'où

$$\delta_v f = \frac{41}{48,5} \times 7,5 = 6^{mm},6,$$

ce qui permet de construire le point δ_v. Menons de ce point une tangente à fC ou plutôt prenons le sommet j_2 de ce polygone, dont les côtés prolongés comprennent entre eux le point δ_v; menons l'horizontale de γ_2, on trouve le point c'_8 et, en le reportant sur l'arc, on a le point c_8 qui est celui par lequel doit passer le polygone des pressions.

Ce polygone devant ainsi passer par les trois points A, c_8, B est déterminé. Il est tracé en lignes pleines. Il coupe l'arc en un second point placé entre les verticales $b_1 b'_1$ et P'_0. Si nous reportons ce second point d'intersection sur l'arc amplifié par une verticale et de là, par une horizontale, sur le polygone $C'f'$, nous voyons que nous rencontrons le premier côté de ce polygone. Ce côté coïncide avec le rayon polaire symétrique de celui qui passe par le point de séparation des forces $\frac{h'_1}{5}$ et $\frac{h'_2}{5}$. Nous avons donc son prolongement d'une façon très exacte. Il fournit le point δ_1 et, comme contrôle du degré d'exactitude de notre interpolation, on doit avoir

$$\delta_v \delta_1 = fD.$$

C'est ce qui a lieu très exactement.

§ 8.

SOLIDE D'ÉGALE RÉSISTANCE SOUS LES ACTIONS RÉUNIES D'UNE CHARGE DONNÉE QUELCONQUE ET D'UN CHANGEMENT DONNÉ DE TEMPÉRATURE. — Si l'on veut que l'arc soit d'égale résistance sous l'influence d'une

charge déterminée (que nous supposerons d'abord symétrique comme au § 4), à l'instant où il a subi les accroissements extrêmes $\pm\tau$ de température par lesquels il est appelé à passer, on devra poser (Chap. I, § 411)

$$\int_0^s \frac{M}{I} y\, ds = \mp E\,\delta l \tau,$$

et, si la charge est symétrique,

$$\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{M}{I} y\, ds = \mp \frac{E\,\delta l \tau}{2}.$$

La condition d'égale résistance est toujours

$$\frac{Mh}{2I} = \pm R,$$

R ayant même signe que M.

Soit (*fig.* A, *Pl. XXXVII*) J le point (supposé d'abord unique comme au § 4) du demi-arc AC où le moment de flexion s'annule et σ l'arc AJ. Si M est positif entre A et J, il sera négatif entre J et C, et *vice versa.*

Des deux dernières équations, on tirera en tous cas

$$\int_0^\sigma \frac{y\, ds}{h} - \int_\sigma^{\frac{s}{2}} \frac{y}{h}\, ds = \pm \frac{E\,\delta l \tau}{2R}.$$

Soit j le point où l'horizontale de J′ coupe la courbe funiculaire Cf de pôle C des forces horizontales $\frac{y}{h}\, ds$ et δ le point où la tangente à cette courbe en j coupe la corde AB.

Dans la pratique, si l'on remplace ds par Δs, Δs étant la longueur d'arc comprise entre deux des points de division précédemment employés, cette équation se trouve remplacée par celle-ci

$$\sum_0^\sigma \frac{y}{h} - \sum_6^{\frac{s}{2}} \frac{y}{h} = \pm \frac{E\,\delta l \tau}{2R \times \Delta s}.$$

La courbe Cf sera remplacée par un polygone funiculaire Cf.

D'ailleurs, par la construction de la figure, on a trouvé les lon-

gueurs h' définies par

$$h' = \frac{\overline{OC}^2}{h},$$

d'où

$$\sum_0^{\sigma} h'y - \sum_0^{\frac{s}{2}} h'y = \pm \frac{E\,\delta l\tau}{2R \times \Delta s} \times \overline{OC}^2.$$

Si $\tau = 0$, on retrouve l'équation précédemment obtenue, et le point δ où la tangente à la courbe funiculaire en j coupe AB est, comme on l'a vu (§ 4) au milieu de fD.

On a, comme ici les h' ont été réduits au $\frac{1}{5}$ de leur valeur,

$$\sum_{\sigma}^{\sigma} h'y = 5\,C'D \times f\delta,$$

$$\sum_{\sigma}^{\frac{s}{2}} h'y = 5\,C'D \times \delta D.$$

Donc on doit avoir

$$f\delta - \delta D = \pm \frac{E\,\delta l\tau}{10R} \times \frac{\overline{OC}^2}{\Delta s \times C'D}.$$

D'ailleurs

$$f\delta + \delta D = fD,$$

d'où

$$\delta = \frac{1}{2} fD \pm \frac{E\,\delta l\tau}{20R} \times \frac{\overline{OC}^2}{\Delta s \times C'D}.$$

Le point δ, au lieu d'être au milieu de fD, se trouve à une distance de ce milieu

$$(a) \qquad \frac{E\,\delta\tau}{20R} \times \frac{\overline{OC}^2}{\Delta s \times C'D} \times l,$$

d'un côté ou de l'autre, suivant que la température de l'arc est à sa valeur maxima ou à sa valeur minima, ce qui donne deux points δ'' et δ' également distants du point δ.

Observons d'ailleurs que l'expression de (a) est bien une longueur, c'est-à-dire que le coefficient de l est un nombre.

En effet, le rapport

$$\frac{\overline{OC}^2}{\Delta s \times C'D}$$

est un nombre sans dimensions.

On s'est donné OC en nombre rond de mètres par exemple; on connaît C'D, qui est ici double de la flèche de l'arc, et $\Delta s = \frac{s}{n}$, si s est la longueur de l'arc ACB et n le nombre de parties en lesquelles on l'a divisé.

On peut donc calculer facilement le rapport ci-dessus.

D'autre part, $\frac{E}{4R}$, rapport du coefficient d'élasticité à une tension ou pression par unité de surface R, est aussi un nombre sans dimensions; car E est défini par l'allongement λ d'une barre de longueur l et de section S sous l'action d'une force F, par la formule

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{E} \times \left(\frac{F}{S}\right),$$

où le premier membre est sans dimensions; donc il en est de même du second; or $\frac{F}{S}$, action par unité de surface de la barre, est une grandeur homogène à R : ainsi il suffit de connaître pour la matière employée le coefficient d'élasticité avec des unités de longueur et de force arbitraires et la résistance R qu'on ne veut pas dépasser avec ces mêmes unités. Quelles qu'elles soient, le rapport numérique $\frac{E}{R}$ n'en sera pas affecté. S'il s'agit du fer et qu'on prenne le mètre et le kilogramme pour unités, on peut faire

$$E = 16 \times 10^9.$$

Si l'on ne veut pas dépasser une tension de 6^{kg} par millimètre carré ou de 6×10^6 kilogrammes par mètre carré,

$$R = 6 \times 10^6;$$

d'où

$$\frac{E}{20R} = \frac{8}{6} \times 10^2 = \frac{400}{3},$$

et cela, même si l'on changeait toutes les unités.

D'autre part, le coefficient de dilatation du fer, si l'on prend le mètre pour unité de longueur, est

$$\delta = 0{,}0000122,$$

c'est-à-dire qu'une barre de fer d'un mètre de longueur s'allonge de $0^m{,}0000122$ par chaque degré C. d'accroissement de température.

Admettons que l'écart entre la température possible et celle de la pose puisse être de $\pm 30°$, en sorte que $\tau = 30$, d'où

$$\delta\tau = 0,000366.$$

Par suite, l'expression (a) devient

$$(b) \qquad 0,00488 \times \frac{\overline{OC}^2}{\Delta s \times C'D} \times l,$$

où la longueur l ou portée de l'arc doit être exprimée en mètres, puisque le coefficient de dilatation est rapporté au mètre.

Si l'échelle des longueurs est $\frac{1}{1000}$, on devra, par suite, après avoir marqué le point δ, milieu de Df, prendre les points δ' et δ'' sur l'épure, de façon que

$$(b') \qquad \delta\delta'' = \delta\delta' = 0,0244 \frac{\overline{OC}^2}{\Delta s \times CD} \times l^{mm}.$$

En menant par δ'' et δ' des tangentes à la courbe Cf, on obtient deux points de contact j_1 et j_2 et, par suite, deux points correspondants J'_1 et J'_2 placés sur les horizontales de j_1 et j_2 et deux points J_1 et J_2 placés sur les verticales de J'_1, J'_2.

Le polygone des pressions passera par l'un ou l'autre des points J_1, J_2 suivant que la température a l'une ou l'autre des valeurs extrêmes qu'elle peut atteindre.

L'un ou l'autre des deux polygones funiculaires des charges données passant l'un par les trois points A, J_1, B, l'autre par ceux A, J_2, B se réaliserait dans un arc d'égale résistance sous l'action des charges données, suivant que cet arc serait constitué d'égale résistance pour l'une ou l'autre des deux températures extrêmes qui peuvent se réaliser.

Mais, au lieu d'adopter l'une ou l'autre, il conviendra de procéder ainsi.

Soient q_1, q_2 les distances polaires connues qui répondent à ces deux polygones de pressions et soient ζ_1 les ordonnées de l'un d'eux, ζ_2 celles de l'autre, ces ordonnées comptées jusqu'à l'arc. Il en résulte que le moment de flexion qui se produit, si c'est l'un des deux polygones qui se réalise, est en valeur absolue

$$q_1\zeta_1,$$

et si c'est l'autre

$$q_2\zeta_2.$$

On adoptera pour chaque section le plus grand des deux.

Soit $q\zeta$ ce moment. On déterminera le moment d'inertie I de la section par la formule

$$\frac{q\zeta h}{2I} = R.$$

Si la charge n'est pas symétrique, on procède de même. Soit Cf la courbe funiculaire symétrique de Cf ou le polygone substitué à cette courbe :

1° On essayera d'abord, comme au § 7, si le polygone des pressions ne coupe l'arc qu'en un seul point.

Ce point J ne sera plus ici le sommet de l'arc ; il sera donné, si σ est l'arc AJ, par l'équation exacte

$$\int_0^\sigma \frac{y}{h}\,ds - \int_\sigma^s \frac{y}{h}\,ds = \pm\frac{E\,\delta\tau\,l}{2R}$$

ou approximativement

$$\sum_0^\sigma h'y - \sum_\sigma^s h'y = \pm\frac{E\,\delta\tau}{10R} \times \frac{\overline{OC}^2}{\Delta s \times CD}.$$

Soient (*fig.* A, *Pl. XXXVII*) J le point cherché, J' le point correspondant sur l'arc amplifié, j le point où l'horizontale de J' coupe Cf et δ le point où la tangente en j à l'arc Cf coupe la ligne des appuis AB.

On a

$$\sum_0^\sigma h'y = 5\,CD \times f\delta,$$

$$\sum_\sigma^s h'y = 5\,CD \times f'\delta;$$

d'où

$$f\delta - f'\delta = \pm\frac{E\,\delta\tau\,l}{10R \times \Delta s} \times \frac{\overline{OC}^2}{CD}.$$

Et comme

$$f\delta + f'\delta = ff' = 2fD,$$

on conclut

$$f\delta = fD \pm \frac{E\,\delta\tau\,l}{20R \times \Delta s} \times \frac{\overline{OC}^2}{CD}.$$

Pour $\tau = 0$, on aurait $f\delta = f\mathrm{D}$. Le point J coïnciderait avec le sommet de l'arc, comme cela doit être (§ 4).

Ici, la distance du point J à la verticale CD est égale à

$$\frac{\mathrm{E}\,\delta\tau l}{20\,\mathrm{R} \times \Delta s} \times \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{\overline{\mathrm{CD}}},$$

et est située d'un côté ou de l'autre de cette verticale suivant que l'arc doit être d'égale résistance sous l'action réunie de la charge donnée et de l'une ou de l'autre des deux températures extrêmes qu'il peut atteindre.

On aura donc deux points symétriques (non marqués), J′ et J″. On tracera deux polygones funiculaires des charges données passant tous deux par A et B et l'un par le point J′, l'autre par le point J″.

S'ils ne coupent l'arc en aucun autre point, ils seront les polygones des pressions répondant aux deux températures extrêmes considérées.

Ils fournissent en chaque point de l'arc deux moments de flexion répondant à ces températures ; on adoptera le plus grand des deux pour déterminer le moment d'inertie de la section.

Si l'un de ces polygones ou les deux coupent l'arc en un autre point que ceux supposés, il faudra procéder théoriquement comme au § 7.

Seulement l'équation (5) du § 6 sera remplacée par celle-ci

$$\int_0^{\sigma} \frac{y}{h}\,ds - \int_{\sigma}^{\sigma_1} \frac{y}{h}\,ds + \int_{\sigma_1}^{s} \frac{y}{h}\,ds = \pm \frac{\mathrm{E}\,\delta\tau l}{2\mathrm{R}},$$

et, pour les opérations graphiques, par celle-ci

$$(c) \qquad \sum_0^{\sigma} h'y - \sum_{\sigma}^{\sigma_1} h'y + \sum_{\sigma_1}^{s} h'y = \pm \frac{\mathrm{E}\,\delta\tau}{10\mathrm{R}} \times \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{\Delta s \times \overline{\mathrm{CD}}} \times l.$$

La modification à apporter au résultat du § 6 est simplement celle-ci : l'abscisse α du point J, au lieu de répondre au point où la courbe (β) coupe l'axe des abscisses, répond au point où cette courbe coupe une parallèle à cet axe menée au-dessus ou au-dessous de lui, suivant celle des deux températures que l'on considère,

et à la distance

$$\frac{\mathrm{E}\,\delta\tau}{10\,\mathrm{R}} \times \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{\Delta s \times \mathrm{CD}} \times l.$$

Dans les opérations du § 7 il n'y a rien à changer, si ce n'est l'équation à employer pour l'interpolation qu'on a à faire. Si δ_v et δ_1 sont les deux points ainsi désignés au § 7, on a

$$\sum_0^\sigma h'y - \sum_\sigma^{\sigma_1} h'y + \sum_{\sigma_1}^s h'y = 5\mathrm{C'D}(f\delta_v - \delta_v\delta_1 + \delta_1 f').$$

Donc l'équation ci-dessus donne

$$f\delta_v - \delta_v\delta_1 + \delta_1 f' = \pm \frac{\mathrm{E}\,\delta\tau}{10\,\mathrm{R}} \times \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{\mathrm{C'D} \times \Delta s} \times l.$$

Et comme

$$f\delta_v + \delta_v\delta_1 + \delta_1 f' = 2f\mathrm{D},$$

il en résulte

$$\delta_v\delta_1 - f\mathrm{D} \mp \frac{\mathrm{E}\,\delta\tau}{10\,\mathrm{R}} \times \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{\mathrm{C'D} \times \Delta s} + l = 0;$$

c'est le premier membre de cette équation qu'on formera pour chacun des deux polygones tracés, au lieu de former simplement la différence $\delta_v\delta_1 - f\mathrm{D}$, et ce sont les deux résultats obtenus qui fourniront les termes de l'interpolation.

§ 9.

REMARQUES SUR LA MARCHE A SUIVRE DANS LA PRATIQUE. — Dans la pratique on peut procéder par l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

A. 1° S'il n'y a que des charges fixes, déterminer directement le solide d'égale résistance relatif à ces charges et, s'il y a lieu, aux variations extrêmes de température auxquelles l'arc est exposé, le tout par les méthodes qui précèdent.

2° S'il y a des charges mobiles, les remplacer provisoirement par des charges fixes et opérer de même.

3° Avec les moments d'inertie ainsi obtenus on peut, si on le

juge utile, chercher les moments de flexion dus aux charges mobiles et vérifier si les dimensions données suffisent à les supporter, en ayant égard ou non, suivant les cas, à la compression de la fibre moyenne. Cette vérification se ferait en procédant comme il est indiqué aux divers Chapitres de ce Volume concernant les arcs.

B. On peut aussi, s'il y a des charges mobiles, les considérer dans un petit nombre de positions, puis déterminer le solide d'égale résistance relatif à une charge formée par la charge permanente et la charge mobile dans chacune des positions considérées. Pour chacun de ces systèmes de charges, on trouvera ainsi très rapidement le moment d'inertie à donner à chaque section. On adoptera pour chaque section le plus grand des moments d'inertie ainsi trouvés, et alors on n'aura plus d'autre vérification à faire.

La courbe (β) du § 6 reste la même dans les recherches relatives aux diverses positions de la charge mobile.

Mais, si l'on ne considère que des charges symétriques, elle n'est pas à tracer du tout et l'opération, quel que soit le nombre des positions des charges mobiles que l'on considère, est extrêmement rapide.

Il en est de même pour des charges mobiles pour lesquelles on a pu s'assurer, par la méthode du § 7, que le polygone des pressions ne coupera l'arc qu'en un point qui sera son sommet.

II. — ARCS ENCASTRÉS A LEURS DEUX EXTRÉMITÉS.

§ 10.

FORMULES GÉNÉRALES. — Les formules fondamentales sont ici (§ 446)

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{M\,ds}{I} = 0, \\ \displaystyle\int \frac{Mx\,ds}{I} = 0, \\ \displaystyle\int \frac{My\,ds}{I} = 0, \end{cases}$$

auxquelles on doit joindre la condition d'égale résistance

$$(2)\qquad \frac{Mh}{2I} = \pm R.$$

§ 11.

CHARGE SYMÉTRIQUE. — Supposons un arc symétrique et une charge symétrique.

Alors, par raison de symétrie, la seconde des équations (1) est satisfaite d'elle-même. Dans les deux autres, il suffit de faire les intégrales sur une moitié de l'arc; nous les écrirons donc

$$(3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{M\,ds}{I} = 0, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{My\,ds}{I} = 0. \end{cases}$$

On ne peut, en général, y satisfaire en même temps qu'à la condition d'égale résistance qu'en supposant deux points d'intersection du polygone des pressions avec l'arc ou deux changements de signe du moment de flexion.

Soient (*fig.* 80, p. 351) A et B les deux extrémités de l'arc, J_1 et J_2 les deux points dont il s'agit, α_1, α_2 leurs abscisses comptées du point A et σ_1, σ_2 les deux arcs AJ_1, AJ_2.

Les conditions à satisfaire en vertu de (2) et (3) sont

$$(4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\sigma_1} \frac{ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\frac{s}{2}} \frac{ds}{h} = 0, \\ \displaystyle\int_0^{\sigma_1} \frac{y\,ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{y\,ds}{h} + \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y\,ds}{h} = 0; \end{cases}$$

d'où

$$(4')\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{ds}{h} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{ds}{h}, \\ \displaystyle\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{y\,ds}{h} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y\,ds}{h}. \end{cases}$$

Si l'on peut regarder la hauteur h de l'arc comme sensiblement constante, la première donne

$$(5)\qquad J_1J_2 = \frac{AC}{2},$$

de sorte que, l'un des points J_1, J_2 étant donné, l'autre s'ensuit.

Si l'on peut regarder comme constante la projection verticale $h\dfrac{dx}{ds}$ de la hauteur de l'arc, la première équation donne, en appelant e_1 et e_2 les projections des points J_1 et J_2 sur la corde,

$$e_1e_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{AD}$$

et, l'un des points J_1 étant connu, l'autre s'ensuit aussi.

§ 12.

CAS D'UN ARC CIRCULAIRE DE HAUTEUR CONSTANTE, SOUMIS A DES CHARGES SYMÉTRIQUES. — Dans le cas d'un arc de hauteur constante, les équations à satisfaire deviennent

$$\int_0^{\sigma_1} ds - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds + \int_{\sigma_2}^{\frac{s}{2}} ds = 0,$$

d'où

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} ds,$$

et de même

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} y\, ds = \int_0^{\frac{s}{2}} y\, ds.$$

S'il s'agit d'un arc circulaire, en raisonnant comme au § 2 et appelant ε_1 et ε_2 les angles polaires des deux points inconnus J_1 et J_2 où le polygone des pressions coupe l'arc, on aurait

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\theta_0,$$

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos\theta_0 - (\sin\varepsilon_2 - \sin\varepsilon_1) = \frac{1}{2}(\theta_0\cos\theta_0 - \sin\theta_0),$$

ou

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\theta_0,$$

$$\sin\varepsilon_2 - \sin\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\sin\theta_0,$$

soit

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\theta_0,$$

$$\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) = \frac{1}{4}\frac{\sin\theta_0}{\sin\frac{1}{4}\theta_0} = \cos\frac{1}{2}\theta_0 \cos\frac{\theta_0}{4},$$

qui donnent facilement $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ et $\varepsilon_2 + \varepsilon_1$.

§ 13.

CAS D'UN ARC PARABOLIQUE DONT LA HAUTEUR EN PROJECTION VERTICALE EST CONSTANTE. — Si l'on suppose un arc dont le produit $h\frac{dx}{ds}$ est constant, les équations deviennent, en appelant x_1 et x_2 les abscisses des points J_1 et J_2,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} y\,dx.$$

La première donne

$$x_2 - x_1 = \frac{l}{4}.$$

La seconde, si y est proportionnel à $x^{\frac{1}{2}}$,

$$x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ces deux équations fournissent les valeurs de x_1 et x_2.

§ 14.

CAS GÉNÉRAL. — Dans le cas d'un arc symétrique quelconque dont la hauteur h varie arbitrairement, formons, comme aux § 6 et 7, des longueurs h' proportionnelles aux inverses de h, c'est-à-dire telles que

$$h' = \frac{\overline{OC}^2}{h},$$

OC étant une longueur arbitrairement choisie; alors les équations à satisfaire deviennent

$$(4'')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} h'\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} h'\,ds, \\ \displaystyle\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} h'y\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} h'y\,ds, \end{cases}$$

ou, si l'on divise le demi-arc en parties égales à Δs,

$$(4''')\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma_1}^{\sigma_2} h' = \frac{1}{2}\sum_0^{\frac{s}{2}} h', \\ \displaystyle\sum_{\sigma_1}^{\sigma_2} h'y = \frac{1}{2}\sum_0^{\frac{s}{2}} h'y. \end{cases}$$

Portez bout à bout sur la ligne DA (*fig.* 81, p. 370) les hauteurs h'_i ou des longueurs proportionnelles répondant aux points de division de manière à former le polygone Df_0 de forces horizontales égales ou proportionnelles aux longueurs h'_i, ces forces étant supposées appliquées aux points de division de l'arc et construisez un polygone funiculaire Cf de ces forces.

Si J_1 et J_2 sont les points cherchés où le moment de flexion s'annule, menons les horizontales de ces points jusqu'à leurs rencontres en j_1 et j_2 avec le polygone fC. Supposons, pour un instant, qu'au lieu du polygone on ait tracé la courbe exacte fC, c'est-à-dire la courbe funiculaire des forces continues $h'\,ds$.

Par les points j_1 et j_2 menons des tangentes à cette courbe. Elles coupent la corde AB en deux points δ_1 et δ_2. On aura

$$\sum_0^{\sigma_1} h'y = \mathrm{CD} \times f\delta_1,$$

$$\sum_{\sigma_1}^{\sigma_2} h'y = \mathrm{CD} \times \delta_1\delta_2,$$

$$\sum_{\sigma_2}^{\frac{s}{2}} h'y = \mathrm{CD} \times \delta_2\mathrm{D}.$$

Donc, la seconde des équations à satisfaire donne

$$f\delta_1 - \delta_1\delta_2 + \delta_2 D = 0.$$

Et, comme

$$f\delta_1 - \delta_1\delta_2 + \delta_2 D = fD,$$

il en résulte

$$\delta_1\delta_2 = \frac{1}{2} fD.$$

Fig. 81.

Par le point C menons les rayons polaires Ch_1, Ch_2 respectivement parallèles aux tangentes $j_1\delta_1$, $j_2\delta_2$. On voit de suite que la première des équations à satisfaire donne

$$h_1h_2 = \frac{1}{2} D f_0.$$

D'après cela, la marche à suivre pour résoudre le problème est celle-ci :

Partant d'un point δ_1 pris au sentiment, faites $\delta_1\delta_2 = \frac{1}{2} fD$. (Si l'on veut, on peut commencer par chercher (§ 12) quels seraient le point J_1 et, par suite, le point δ_1 pour un arc circulaire de hauteur constante, de même portée et de même flèche que celui qui est donné et prendre ce point δ_1 comme point de départ.)

Menez des points δ_1 et δ_2 des tangentes à la ligne Cf.

Soient j_1 et j_2 les points de contact.

On mènera du point C les rayons polaires Ch_1, Ch_2 parallèles

aux tangentes $\delta_1 j_1$, $\delta_2 j_2$. Ces rayons polaires rencontrent le polygone Cf_0 des forces h'_i en deux points h_1, h_2. Si la distance $h_1 h_2$ de ces points vaut la moitié de Df_0, cela prouve que le point de départ δ_1 a été bien choisi et que les points cherchés J_1, J_2 où le polygone des pressions coupe l'arc sont sur les horizontales des points j_1 et j_2. S'il y a une différence notable entre $h_1 h_2$ et $\frac{1}{2} Df_0$, on prendra un nouveau point de départ δ_1 un peu à gauche ou à droite de j_1, suivant que la différence

$$\frac{1}{2} Df_0 - h_1 h_2$$

est positive ou négative. Généralement ce second tâtonnement suffira. Car on juge facilement sur l'épure de ce que donnera le nouveau point de départ δ'_1 et à quelle distance il conviendra de le placer du premier.

Il est aisé de voir les légères modifications à apporter à ce qui précède, lorsque la courbe Cf est remplacée par un polygone obtenu en divisant l'arc en parties égales par des points de division b_1, b_2, ..., b_7. On prendra pour le point j_1 le sommet du polygone Cf, tel que les deux côtés qui y aboutissent, étant prolongés, comprennent le point δ_1 entre eux.

Au lieu de mener le rayon polaire Ch_1 parallèle à la tangente en j_1, on mènera les deux rayons polaires parallèles aux côtés dont il vient d'être parlé et on adoptera pour point h_1 le milieu du segment intercepté par ces deux rayons sur le polygone des forces. On procédera de même pour les points j_2 et h_2.

Remarque. — Si l'arc est surbaissé, on peut amplifier ses ordonnées comme au § 7.

§ 15.

TRACÉ DU POLYGONE DES PRESSIONS. — Les points J_1, J_2 sont deux points par lesquels doit passer le polygone des pressions, *quelles que soient les charges données*, pourvu qu'elles soient symétriques par rapport à CD. Comme, de plus, le côté de ce polygone coupant la ligne CD doit être horizontal, il est déterminé pour chaque système de charges données.

Les détails des opérations sont les mêmes que pour l'arc à appuis simples.

Remarque I. — Après avoir tracé les hauteurs h_i, on peut, si on le juge plus commode, les projeter sur une verticale, mesurer les projections et tracer les inverses de ces lignes projetées.

Appelons h''_i ces inverses,

$$h''_i = h'_i \frac{dx}{ds};$$

par suite, les équations exactes (§ 11) deviennent

$$\int_0^{\alpha_1} h''\,dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} h''\,dx - \int_{\alpha_2}^{\frac{l}{2}} h''\,dx = 0,$$

$$\int_0^{\alpha_1} h''y\,dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} h''y\,dx + \int_{\alpha_2}^{\frac{l}{2}} h''y\,dx = 0,$$

et les équations approchées, si l'on divise la *corde* (non plus l'arc) en parties égales Δx,

$$\sum_0^{\alpha_1} h'' - \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} h'' + \sum_{\alpha_2}^{\frac{l}{2}} h'' = 0,$$

$$\sum_0^{\alpha_1} h''y - \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} h''y + \sum_{\alpha_2}^{\frac{l}{2}} h'' = 0$$

ou

$$\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} h'' = \frac{1}{2}\sum_0^{\frac{l}{2}} h'',$$

$$\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} h''y = \frac{1}{2}\sum_0^{\frac{l}{2}} h''y.$$

On se servira de ces dernières équations quand il paraîtra plus commode ou plus exact de diviser la corde en parties égales au lieu de l'arc. On voit qu'elles sont les mêmes que celles obtenues en divisant l'arc, sauf que la lettre h' est remplacée par h''.

§ 16.

REMARQUE SUR LES APPLICATIONS A DES ARCS AVEC PILIERS. — Si, pour un arc de forme complexe, comme il peut s'en présenter dans les grandes formes de charpente, il y a des parties pour lesquelles il est commode de diviser l'arc en parties égales, d'autres pour lesquelles il est plus avantageux de diviser la corde, rien n'empêche de le faire.

Ainsi supposons qu'on veuille appliquer cette méthode à une ferme comme celle de la galerie des machines de l'Exposition universelle de 1878, dont la moitié est représentée sur la *Pl. XXXVIII* (*fig.* B) à l'échelle de $7^{mm},5$ par mètre.

Elle est formée en partie de panneaux dont les montants verticaux sont équidistants de $1^{m},92$.

La fibre moyenne ou lieu des milieux des hauteurs de la ferme et du pilier est tracée en traits discontinus.

On peut la diviser en deux parties :

1° Celle Aa qui se rapporte au pilier;
2° Celle aC qui se rapporte à l'arbalétrier.

Pour cette dernière, on adoptera au moins jusqu'au point a' la division naturelle, celle de la corde horizontale par parties égales à la longueur des panneaux, soit en parties

$$\Delta x = 1^{m},92.$$

Tout le reste, c'est-à-dire $a'aA$, on en subdivisera la fibre moyenne elle-même en parties égales Δs.

Pour ramener les équations à écrire dans ce cas (et même dans le cas où un nombre quelconque de portions d'une ferme étaient divisées en parties égales Δs de l'arc et d'autres en parties égales Δx de la corde) exactement à la même forme que quand toute la fibre moyenne a été divisée en parties égales, nous procéderons ainsi :

De A en a' construisons les inverses des hauteurs h de la ferme. De a' en C projetons ces hauteurs h sur une verticale, ce qui donne les longueurs $h\,\frac{dx}{ds}$. Construisons des longueurs proportionnelles

aux inverses de ces dernières, c'est-à-dire à $\frac{1}{h\frac{dx}{ds}}$, et réduisons les lignes obtenues dans le rapport *constant* $\frac{\Delta x}{\Delta s}$, ce qui donne des lignes proportionnelles à

$$(a) \qquad \frac{\Delta x}{\Delta s} \times \frac{1}{h\frac{dx}{ds}}.$$

Désignons par h' les longueurs ainsi obtenues pour toute la ferme, c'est-à-dire que, de A en a', les lignes que nous appelons h' sont proportionnelles à $\frac{1}{h}$ et, de a' en C, elles sont proportionnelles aux grandeurs (a).

Je dis que, moyennant cette notation, les équations à écrire sont les mêmes que si l'on avait subdivisé tout l'arc en parties égales ou toute la corde.

En effet, en désignant les limites des intégrations par les mêmes lettres que les points marquant ces limites, on a, pour la première equation,

$$\int_A^C \frac{ds}{h} = \int_A^{a'} \frac{ds}{h} + \int_{a'}^C \frac{dx}{h\frac{dx}{ds}} = 0$$

ou approximativement

$$\Delta s \sum_A^{a'} \frac{1}{h} + \Delta x \sum_{a'}^C \frac{1}{h\frac{dx}{ds}} = 0$$

ou

$$\sum_A^{a'} \frac{1}{h} + \sum_{a'}^C \frac{\Delta x}{\Delta s} \times \frac{1}{h\frac{dx}{ds}} = 0$$

ou avec notre notation

$$\sum_A^C h' = 0.$$

On aura de même

$$\sum_A^C h'y = 0.$$

Donc, si J_1 et J_2 sont les points cherchés où la fibre moyenne coupe le polygone des pressions, on aura]

$$\sum_{A}^{J_1} h' - \sum_{J_1}^{J_2} h' + \sum_{J_2}^{C} h' = 0.$$

Et, comme

$$\sum_{A}^{J_1} h' + \sum_{J_1}^{J_2} h' + \sum_{J_2}^{C} h' = Df_0,$$

en appelant (comme sur la figure de la p. 370) f_0 le point obtenu en portant bout à bout les longueurs h' telles qu'elles viennent d'être définies, on en conclut

$$\sum_{J_1}^{J_2} h' = \frac{1}{2} Df_0.$$

On aurait de même

$$\sum_{J_1}^{J_2} h'y = \tfrac{1}{2} Df,$$

en appelant f l'extrémité du polygone funiculaire des forces fictives h', aussi comme sur la figure de la page 370, de sorte que rien n'est à changer à la marche précédemment suivie. Nous arrivons donc à cette conclusion :

Si l'on est amené pour certaines portions d'une ferme à diviser la fibre moyenne en portions égales à Δs, pour d'autres portions, la corde en parties égales à Δx, on construira :

Pour les premières, des longueurs

$$h' = \frac{\overline{OC}^2}{h},$$

OC *étant une longueur fixe arbitrairement choisie;*

Pour les dernières, celles

$$h' = \frac{\overline{OC}^2}{h\frac{dx}{ds}} \times \frac{\Delta x}{\Delta s},$$

où $h\frac{dx}{ds}$ sont les hauteurs de la ferme normales à la fibre moyenne et projetées sur une verticale.

Avec les longueurs ainsi obtenues h', on opérera sur les points de division exactement comme si l'arc avait été partout divisé en parties égales et comme il a été dit au § **14**.

§ 17.

APPLICATION A LA GRANDE FERME DE L'EXPOSITION DE 1878. — La ferme dont il s'agit et dont il vient d'être parlé avait $35^m,60$ de portée entre les axes des piliers; ceux-ci avaient 16^m de hauteur; la hauteur sous faîtage était de $24^m,60$.

Les fermes avaient 15^m d'écartement.

Les piliers sont encastrés dans le sol.

Les charges et surcharges que MM. Molinos et Seyrig, dans la Notice susmentionnée, ont admises dans les calculs de la résistance de cette ferme, calculs faits selon les formules de M. de Dion, étaient, par mètre carré de couverture,

	kg
Poids du fer de la couverture, déduit du métré définitif et en négligeant celui des piliers, des verrières et des sablières qui ne produisent pas d'effet sur la ferme proprement dite	52
Poids de la couverture en ardoises métalliques et voligeage.....	27
	79
Surcharge accidentelle de neige	40
	119

soit, en nombre rond, 120^{kg}.

Et, comme l'écartement des fermes est de 15^m, la charge par mètre courant de ferme est

$$p = 15 \times 130 = 1950^{kg}.$$

Nous nous proposons, en supposant qu'on ne connaisse aucune dimension des pièces de l'arc, de trouver directement les deux points J_1 et J_2 où la parabole courbe des pressions devra couper la fibre moyenne pour que l'arc soit d'égale résistance; de là, on déduira facilement la courbe des pressions et, par suite, tous les éléments nécessaires à la détermination de la résistance des diverses parties de la charpente.

Soient H_0 la hauteur au-dessus du sol du point a de la fibre moyenne et H celle du point C.

Soient η_1 et η_2 les ordonnées inconnues des points J_1 et J_2.

Nous pouvons regarder la partie Aa de la fibre moyenne comme étant sensiblement une droite verticale et la partie aC comme étant sensiblement une droite inclinée; soit i son inclinaison.

Si, de plus, nous regardons le pilier comme ayant partout même épaisseur h_0 qu'à son pied, et l'arbalétrier comme ayant partout une hauteur constante h_1, supprimant ainsi la résistance due aux accroissements de hauteur donnés dans les angles, nous nous plaçons dans des conditions défavorables.

Nous aurons, en observant que de A en a on a

$$ds = dy,$$

et de a en C

$$ds = \frac{h}{\sin i},$$

$$\int_A^C \frac{ds}{h} = \int_A^a \frac{dy}{h} + \frac{1}{\sin i}\int_a^C \frac{dy}{h} = 0,$$

$$\int_A^C \frac{y\,ds}{h} = \int_A^a \frac{y\,dy}{h} + \frac{1}{\sin i}\int_a^C \frac{y\,dy}{h} = 0.$$

Admettons, sauf vérification, que le point J_1 est entre A et a et le point J_2 entre a et C. Alors les deux équations deviennent

$$\frac{1}{h_0}\int_0^{\eta_1} dy - \frac{1}{h_0}\int_{\eta_1}^{H_0} dy - \frac{1}{h_1 \sin i}\int_{H_0}^{\eta_2} dy + \frac{1}{h_1 \sin i}\int_{\eta_2}^{H} dy = 0,$$

$$\frac{1}{h_0}\int_0^{\eta_1} y\,dy - \frac{1}{h_0}\int_{\eta_1}^{H_0} y\,dy - \frac{1}{h_1 \sin i}\int_{H_0}^{\eta_2} y\,dy + \frac{1}{h_1 \sin i}\int_{\eta_2}^{H} y\,dy = 0,$$

ou

$$\frac{1}{h_0}(2\eta_1 - H_0) - \frac{1}{h_1 \sin i}(2\eta_2 - H_0 - H) = 0,$$

$$\frac{1}{h_0}(2\eta_1^2 - H_0^2) - \frac{1}{h_1 \sin i}(2\eta_2^2 - H_0^2 - H^2) = 0.$$

Si l'on prend une hauteur moyenne h_1 de l'arbalétrier et qu'on la projette verticalement, il se trouve que la longueur $h_1 \sin i$ ainsi obtenue est sensiblement égale à celle h_0 du pilier. Nous pouvons donc admettre ici

$$h_0 = h_1 \sin i.$$

Par suite, les équations se simplifient et deviennent

$$2\eta_1 = 2\eta_2 - H,$$
$$2\eta_1^2 = 2\eta_2^2 - H^2$$

ou

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{H}{2},$$

$$\eta_2^2 - \eta_1^2 = \frac{H^2}{2};$$

d'où

$$\eta_2 + \eta_1 = H$$

et, par suite,

$$\eta_1 = \frac{H}{4}, \qquad \eta_2 = \frac{3H}{4}.$$

Les points cherchés J_1 et J_2 tombent bien, comme on l'a supposé, l'un entre A et a, l'autre entre a et B.

La courbe des pressions, parabole ayant son axe dirigé suivant la verticale du sommet de la ferme et assujettie à passer par les points J_1 et J_2 est donc déterminée. On peut la tracer comme au § 5.

Elle est représentée sur la figure.

Elle coupe le sol en A_0. Si, par le milieu de A_0D, on mène une verticale jusqu'à sa rencontre en O avec la tangente au sommet, la ligne A_0O est la tangente en A_0.

Si l'on prend une échelle des forces, telle que p^{kg} soient représentés par une longueur égale à celle qui figure l'unité de longueur sur le dessin, la demi-charge totale

$$p\frac{l}{2}$$

sera représentée par AD. Si, dans l'angle A_0OA_1 formé par la tangente A_0O et l'horizontale SOA_1 du sommet, on inscrit une verticale égale à AD, sa distance δ au point O sera la distance polaire. Il suffit, pour cela, de prendre $OK = AD$ et de mener l'horizontale de K jusqu'à sa rencontre avec OA_0.

Donc, si δ est mesuré à l'échelle des longueurs, qui est ici de $0^m,0075$, la poussée q sera

$$q = \delta p = \frac{\delta}{l} \times pl = \frac{\delta}{l} P,$$

P étant la charge totale, et le moment de flexion M en un point quelconque sera

$$M = q\zeta = \delta\zeta p = \frac{\delta}{l}\zeta P,$$

ζ étant l'ordonnée comprise entre la fibre moyenne et la courbe des pressions, mesurée à l'échelle des longueurs.

On a ici, sur l'épure,

$$\delta = 38^{mm}.$$

D'ailleurs, en millimètres,

$$l = 35,6 \times 7,5 = 267.$$

Donc la poussée est

$$q = \tfrac{38}{267} P.$$

§ 18.

CHARGES DISSYMÉTRIQUES. — Dans ce cas, les trois équations fondamentales (1) du § 10 ne seraient, en général, compatibles avec la condition d'égale résistance que si le polygone des pressions coupait l'arc au moins en trois points.

Supposons d'abord qu'il en soit ainsi.

Soient J_1, J_2, J_3 les points d'intersection et σ_1, σ_2, σ_3 les arcs AJ_1, AJ_2, AJ_3 comptés depuis l'appui de gauche A de la fibre moyenne.

On devra avoir

$$\int_0^{\sigma_1}\frac{ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3}\frac{ds}{h} - \int_{\sigma_3}^{s}\frac{ds}{h} = 0,$$

$$\int_0^{\sigma_1}\frac{x\,ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{x\,ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3}\frac{x\,ds}{h} - \int_{\sigma_3}^{s}\frac{x\,ds}{h} = 0,$$

$$\int_0^{\sigma_1}\frac{y\,ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{y\,ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3}\frac{y\,ds}{h} - \int_{\sigma_3}^{s}\frac{y\,ds}{h} = 0.$$

Nous supposerons toujours le cas usuel où l'arc est symétrique. Alors on satisfait à ces équations en prenant pour l'un des points le sommet C de l'arc et pour les deux autres deux points symétriques par rapport à C et convenablement choisis, c'est-à-dire, σ_1

étant l'arc inconnu AJ_1, en faisant

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_2 = \frac{s}{2}, \qquad \sigma_3 = s - \sigma.$$

Quel que soit σ, la première et la dernière de ces équations seront satisfaites et la seconde devient

$$\int_0^{\sigma} \frac{x\,ds}{h} - \int_{\sigma}^{\frac{s}{2}} \frac{x\,ds}{h} + \int_{\frac{s}{2}}^{s-\sigma} \frac{x\,ds}{h} - \int_{s-\sigma}^{s} \frac{x\,ds}{h} = 0$$

ou

$$\int_0^{\sigma} \frac{x\,ds}{h} - \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{x\,ds}{h} = 0$$

ou

$$\int_0^{\sigma} \frac{x\,ds}{h} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{x\,ds}{h},$$

qui permet de trouver σ exactement, comme on l'a fait pour l'équation analogue

$$\int_0^{\sigma} \frac{y\,ds}{h} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y\,ds}{h},$$

en considérant un polygone funiculaire de forces h' proportionnelles à $\frac{1}{h}$, verticales au lieu de les prendre horizontales.

Si $h\frac{dx}{ds}$ est sensiblement constant, l'équation devient

$$\int_0^{\alpha} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} x\,dx,$$

α étant l'abscisse du point J_2.

Soit

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

$$\alpha = \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{4}.$$

Les points J_1, J_2, J_3 étant ainsi trouvés, quelles que soient les charges données, on tracera (§ 45) leur polygone funiculaire passant par ces trois points et, *pourvu que ce polygone ne coupe*

l'arc en aucun autre point, ce sera le polygone des pressions. Sa distance polaire représente la poussée q de l'arc et le moment de flexion est donné par la formule

$$M = q \times \zeta.$$

Mais très souvent il arrivera que ce polygone coupera l'arc en quatre points. Alors il ne fournira pas la solution. Il faudra, pour l'obtenir, recourir à une règle de fausse position comme au § 6.

S'il y a quatre points J_1, J_2, J_3, J_4 où le polygone inconnu des pressions coupe l'arc, les équations qui définissent les arcs correspondants σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 sont

$$\int_0^{\sigma_1}\frac{ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3}\frac{ds}{h} - \int_{\sigma_3}^{\sigma_4}\frac{ds}{h} + \int_{\sigma_4}^{s}\frac{ds}{h} = 0,$$

$$\int_0^{\sigma_1}\frac{x\,ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{x\,ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3}\frac{x\,ds}{h} - \int_{\sigma_3}^{\sigma_4}\frac{x\,ds}{h} + \int_{\sigma_4}^{s}\frac{x\,ds}{h} = 0,$$

$$\int_0^{\sigma_1}\frac{y\,ds}{h} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{y\,ds}{h} + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3}\frac{y\,ds}{h} - \int_{\sigma_3}^{\sigma_4}\frac{y\,ds}{h} + \int_{\sigma_4}^{s}\frac{y\,ds}{h} = 0.$$

De plus, comme trois des quatre points J_1, J_2, J_3, J_4 suffisent à définir un polygone funiculaire des charges données quelles qu'elles soient, on a une quatrième relation entre les quatre arcs inconnus σ_1, σ_2, σ_3, σ_4.

Mais la résolution de ces équations ne serait plus aussi facilement réalisable que celle des équations que nous avons rencontrées jusqu'ici.

§ 19.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE. — Si l'on fait intervenir à la fois les charges et la température, les problèmes qui précèdent se résolvent sans plus de difficulté; les équations obtenues restent les mêmes, sauf celle

$$\int \frac{My\,ds}{I} = 0,$$

qui est remplacée par

$$\int \frac{My\,ds}{I} = \pm E\,\delta\tau l,$$

et les modifications à apporter aux constructions précédentes sont exactement les mêmes que celles indiquées au § 8.

III. — ARCS DIVERS.

§ 20.

La méthode qui précède s'applique naturellement à l'arc encastré à un bout et appuyé sur tourillon fixe à l'autre, ainsi qu'aux arcs avec charnières. L'ayant développée dans les deux cas les plus importants, nous croyons inutile d'insister sur ce point.

NOTE II.

ARCS CONTINUS ET ARCS RELIÉS A DES POUTRES CONTINUES.

§ 1.

OBJET DE CETTE NOTE. — Ainsi qu'il a été dit au § 3 de la précédente Note, le pont du Douro et le viaduc de Garabit sont formés d'arcs portant des palées métalliques sur lesquelles reposent des poutres portant la voie. Au viaduc de Garabit, les poutres supérieures sont coupées au droit de chaque palée. Au pont du Douro, au contraire, elles sont continues.

Dans le premier cas, la détermination des dimensions à donner à l'Ouvrage ne présente pas de difficultés particulières. On peut calculer directement chacune des poutres à deux appuis simples portant la voie, ainsi que les pressions qu'elle exerce sur les palées. Comme ces pressions sont transmises à l'arc, on connaît directement les charges auxquelles celui-ci doit résister et, par suite, on peut trouver les dimensions qu'il convient de lui donner, d'après les méthodes exposées dans cet Ouvrage.

Si les poutres supérieures sont continues, le problème est beaucoup plus complexe. Une première manière de le résoudre consiste à procéder par approximations successives, ainsi qu'il suit :

1° On regardera les points d'appui des poutres, c'est-à-dire les sommets des palées, comme des points rigoureusement fixes et de niveau. Dans cette hypothèse, on peut calculer les dimensions à donner aux poutres, d'après les méthodes exposées dans la deuxième Partie de cet Ouvrage, ainsi que les pressions que ces poutres exercent sur les palées.

Ces pressions constituant les charges qui agissent sur l'arc, on peut aussi calculer celui-ci et, d'autre part, trouver les déplacements élastiques de ses divers points, notamment les abaissements verticaux positifs ou négatifs subis par les pieds des palées. Ces abaissements verticaux sont sensiblement les mêmes que

ceux des sommets de ces mêmes palées, c'est-à-dire des points d'appui des poutres droites.

2° On pourra donc calculer à nouveau ces dernières, en ayant égard à ces changements de niveau des appuis (deuxième Partie) et en déduire aussi une seconde approximation pour les dimensions à donner à l'arc.

De cette seconde approximation, on pourrait, si on le jugeait utile, passer à une troisième et ainsi de suite.

Mais on peut aussi, une fois que, par l'opération 1° on a obtenu de premières valeurs pour les moments d'inertie des sections des poutres et de l'arc, procéder d'une façon plus directe. Ce sera l'objet de la seconde Partie de cette Note. L'objet de la première est de résoudre ce qu'on peut appeler le problème des *arcs continus,* analogue à celui des poutres continues et qui, posé dans toute sa généralité, s'énonce ainsi : un arc repose par ses deux extrémités sur appuis fixes avec ou sans encastrement; en outre, $n-1$ points de sa fibre moyenne sont assujettis à n'avoir que des déplacements horizontaux, ou plus généralement à avoir des déplacements dont les *composantes verticales* sont données; on demande de déterminer les moments de flexion, efforts tranchants, etc., qui s'y produisent sous l'action de charges quelconques et de changements quelconques de température.

Nous donnerons d'abord la solution analytique du problème en ayant égard à la compression de la fibre moyenne et aux efforts tranchants; nous montrerons ensuite comment on peut le résoudre graphiquement si l'on néglige ces éléments devant la flexion.

Nous suivrons la même marche quand il s'agira du problème des arcs reliés à des poutres droites.

A. — ARCS CONTINUS.

§ 2.

ÉQUATION FONDAMENTALE RIGOUREUSE. — Soit (*fig.* A, *Pl.* XXXIX) $A_0A_iA_n$ la fibre moyenne d'un arc que nous rapportons à deux axes rectangulaires des x et des y, le premier horizontal, et le second vertical ascendant.

Les deux extrémités A_0 et A_n de l'arc reposent sur des appuis fixes, avec ou sans encastrement; de plus, les $n-1$ points donnés

$$A_1, \ \ldots, \ A_{i-1}, \ A_i, \ \ldots, \ A_{n-1}$$

sont assujettis à avoir des déplacements dont les composantes verticales

$$v_1, \ \ldots, \ v_{i-1}, \ v_i, \ \ldots, \ v_{n-1}$$

sont données.

Les charges qui agissent sur l'arc sont quelconques, parallèles ou non.

Nous désignerons respectivement par les lettres

$$x, \ y, \ u, \ v$$

les coordonnées et les composantes du déplacement d'un point quelconque de la fibre moyenne et, par ces mêmes lettres affectées de l'indice i, les quantités analogues se rapportant à l'un des points A_i dont le déplacement vertical v_i est donné.

Nous appellerons d'ailleurs ces points les appuis de l'arc.

Nous poserons

$$x_i - x_{i-1} = l_i,$$

l_i étant ainsi la longueur en projection horizontale de la travée $A_{i-1}A_i$. Nous supposerons que chaque travée $A_{i-1}A_i$, que nous appellerons aussi la travée n° i ou la travée l_i, comme nous l'avons fait dans la théorie des poutres droites continues, est portée à une température donnée τ_i, cette température étant la même en tous les points d'une même travée, mais pouvant varier d'une travée à l'autre.

Cette température positive ou négative est comptée en degrés C. à partir de la température de pose de l'arc, prise pour zéro de l'échelle thermométrique.

Nous désignerons toujours par la lettre I le moment d'inertie, constant ou variable de l'arc, et nous poserons comme précédemment

$$(1) \qquad I\frac{dx}{ds} = I' \quad \text{et} \quad S\frac{dx}{ds} = S',$$

d'où résulte que, dans toutes les formules du § 423, on peut

faire

$$(1') \qquad \frac{ds}{I} = \frac{dx}{I'} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{S} = \frac{dx}{S'}.$$

Nous supposerons les coefficients d'élasticité longitudinal et transversal constants et nous les désignerons, comme au Chapitre I, par E et gE.

Enfin nous appellerons $\int_{l_i}$ une intégrale prise depuis l'extrémité gauche A_{i-1} jusqu'à l'extrémité de droite A_i de la travée $A_{i-1}A_i$ ou l_i.

Ceci posé, si, dans la première et la troisième des formules (A_1) du § 423, on remplace les lettres v_0, Ω_0, x_0, y_0 respectivement par v_{i-1}, Ω_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1} et celles v, Ω, x, y par v_i, Ω_i, x_i, y_i, qu'on supprime les accents sous les signes d'intégration, qu'on ait égard aux trois dernières équations du § 423, on trouvera entre les rotations et déplacements verticaux des deux points A_{i-1} et A_i les deux relations

$$(2) \qquad \Omega_i = \Omega_{i-1} - \frac{1}{E}\int_{l_i} \frac{M}{I'}\,dx,$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} v_i = v_{i-1} &- \Omega_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \\ &+ \delta\tau_i(y_i - y_{i-1}) + \frac{1}{E}\int_{l_i} \frac{M}{I'}(x_i - x)\,dx \\ &+ \frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{g}\right)\int_{l_i} \frac{dM}{ds}\,\frac{dx}{S'} - \frac{1}{E}\int_{l_i} \frac{1}{S'}\,\frac{\partial M}{\partial x}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Il est à peine besoin de faire observer que dans cette formule la lettre I′ n'a pas la même signification que dans celles (A_1).

Dans ces dernières, I′ est le moment d'inertie relatif à la section passant par le point (x', y') et ici c'est le produit $I\frac{dx}{ds}$, pour la section passant par le point (x, y). La même observation s'applique à la lettre S′.

Si l'on multiplie l'équation (3) par $\frac{l_i}{E}$ et qu'on en élimine Ω_{i-1} à l'aide de (2), il vient

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i} \frac{M}{I'}(x_{i-1} - x)\,dx \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{1}{l_i}\int_{l_i} \frac{dM}{ds}\,\frac{dx}{S'} - \frac{1}{l_i}\int_{l_i} \frac{1}{S'}\,\frac{\partial M}{\partial x}\,dx \\ &= E\left[\frac{v_i - v_{i-1} - \delta\tau_i(y_i - y_{i-1})}{l_i} + \Omega_i\right]. \end{aligned} \right.$$

Si, à présent, dans l'équation (3) on remplace l'indice i par celui $i+1$, on aura

$$v_{i+1} = v_i - \Omega_i(x_{i+1} - x_i) + \delta\tau_{i+1}(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{E}\int_{l_{i+1}} \frac{M}{I'}(x_{i+1} - x)\,dx + \frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{g}\right)\int_{l_{i+1}} \frac{1}{S'}\frac{dM}{ds}\,dx - \frac{1}{E}\int_{l_{i+1}} \frac{1}{S'}\frac{\partial M}{\partial x}\,dx$$

ou

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}} \frac{M}{I'}(x_{i+1} - x)\,dx \\ &+ \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}} \frac{1}{S'}\frac{dM}{ds}\,dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}} \frac{1}{S'}\frac{\partial M}{\partial x}\,dx \\ &= E\,\frac{v_{i+1} - v_i - \delta\tau_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{l_{i+1}} + \Omega_i. \end{aligned} \right.$$

Retranchant membre à membre les équations (4) et (4'), il viendra

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i} \frac{M}{I'}(x - x_{i-1})\,dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}} \frac{M}{I'}(x - x_{i+1})\,dx \\ &- \left(1 + \frac{1}{g}\right)\left(\frac{1}{l_i}\int_{l_i} \frac{1}{S'}\frac{dM}{ds}\,dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}} \frac{1}{S'}\frac{dM}{ds}\,dx\right) \\ &+ \frac{1}{l_i}\int_{l_i} \frac{1}{S'}\frac{\partial M}{\partial x}\,dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}} \frac{1}{S'}\frac{\partial M}{\partial x}\,dx \\ &= E\left\{\frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} + \frac{v_{i+1} - v_i}{l_{i+1}} - \delta\left[\frac{\tau_i(y_{i-1} - y_i)}{l_i} + \frac{\tau_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{l_{i+1}}\right]\right\}. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'équation que nous avions en vue.

§ 3.

SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DES ARCS CONTINUS. — L'équation qui précède permet de résoudre complètement le problème des arcs continus, quelles que soient les charges agissantes et les variations de température.

En effet, soient

$$M_0, \; M_1, \; M_2, \; \ldots, \; M_i, \; \ldots \; M_n$$

les moments de flexion inconnus sur les $n+1$ appuis et q la poussée de l'arc.

Le moment de flexion M en un point quelconque peut évidem-

ment s'exprimer linéairement en fonction de ces $n+2$ constantes, qui représentent ainsi les inconnues du problème.

Or l'équation fondamentale appliquée à chaque paire de travées consécutives fournira, entre ces inconnues, $n-1$ relations. Il suffit donc d'en avoir trois autres. Or :

1° Si les deux extrémités de l'arc posent sur tourillons fixes, on a

$$M_0 = 0, \qquad M_n = 0,$$

et si de plus, à l'aide de la première des équations (A_1) du § 423, on exprime que la longueur de la corde A_0A_n reste invariable, c'est-à-dire que $u - u_0 = 0$, u_0 et u se rapportant respectivement aux deux appuis A_0 et A_n, on aura une troisième équation. Si l'axe des x est dirigé suivant A_0A_n, en sorte que $y = y_0 = 0$, cette équation, comme il est aisé de le voir, sera

$$(6) \qquad E\delta\sum_i \tau_i l_i + \int \frac{M}{I'} y\, dx - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\frac{1}{S'}\frac{dM}{ds}dx + \int \frac{\partial M}{\partial y}\frac{dx}{S'} = 0,$$

les intégrales s'étendant à l'arc tout entier et la somme $\sum_i$ s'appliquant à toutes les travées, de sorte que, si toutes les travées sont à une même température τ, le premier terme se réduit à

$$E\,\delta\tau\, l,$$

$l = A_0A_n$ étant la longueur de la corde de l'arc.

2° Si l'appui A_0 est simple et l'appui A_n encastré, on aura

$$M_0 = 0$$

et les deux autres équations sont celles (12) du § 479 où l'on remplacera :

1° $E\,\delta\tau\, l$ par $E\delta\sum_i \tau_i l_i$ si les diverses travées sont à des températures différentes;

2° X, Y, T par leurs valeurs du § 423;

3° Si les deux appuis A_0 et A_n sont encastrés, les trois équations cherchées sont celles (a) du § 468 où l'on fera, s'il y a lieu, le même changement dans le terme relatif à la température, ainsi que les substitutions 2° qui viennent d'être indiquées.

Ainsi le problème des arcs continus à $n+1$ appuis se trouve ramené à la résolution d'un système de $n+2$ équations du pre-

mier degré à $n+2$ inconnues, ou $n+1$ ou n suivant que les deux extrémités de l'arc sont encastrées ou que l'une d'elles seulement l'est ou aucune.

Si l'on néglige l'effort tranchant, il suffit dans toutes les équations de supprimer les termes contenant le facteur $1+\frac{1}{g}$.

Si, en outre, on néglige la compression de la fibre moyenne, on supprimera tous les termes contenant la lettre S'.

L'équation fondamentale devient, dans ce cas,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{M}{I'}(x-x_{i-1})\,dx-\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{M}{I'}(x-x_{i+1})\,dx \\ &=E\left[\frac{v_{i-1}-\delta\tau_i y_{i-1}-(v_i-\delta\tau_i y_i)}{l_i}+\frac{v_{i+1}-\delta\tau_{i+1}y_{i+1}-(v_i-\delta\tau_i y_i)}{l_{i+1}}\right] \\ &=E\left(\frac{v'_{i-1}-v'_i}{l_i}+\frac{v'_{i+1}-v'_i}{l_{i+1}}\right),\end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$v'_i=v_i-\delta\tau_i y_i,$$

quel que soit l'indice i.

Si l'on convient, comme pour les poutres droites continues, de compter les abscisses de chaque travée à partir de son appui de gauche, on aura

$$x_{i-1}=0,\qquad x_{i+1}=l_{i+1},$$

et cette équation devient

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{M}{I'}x\,dx+\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{M}{I'}(l_{i+1}-x)\,dx \\ &=E\left(\frac{v'_{i-1}-v'_i}{l_i}+\frac{v'_{i+1}-v'_i}{l_{i+1}}\right),\end{aligned}\right.$$

qui a exactement la même forme que celle (§ 351) relative à une poutre droite continue de section I' dont les appuis intermédiaires seraient assujettis à avoir des déplacements verticaux donnés v'_i se réduisant à ceux v_i de l'arc lui-même si l'on fait abstraction des effets de la température.

Supposons l'axe des x dirigé suivant la corde A_0A_n :

1° Si les deux appuis extrêmes A_0 et A_n sont posés sur simples tourillons, il faut, à l'équation fondamentale, joindre celle (2')

du § 424

$$(8)\qquad \int \frac{M}{I} y\, ds = \int \frac{M}{I'} y\, dx = -E\delta\Sigma\tau_i l_i,$$

l'intégration étant étendue à l'arc entier et celles

$$(8')\qquad M_0 = M_n = 0.$$

2° Si l'appui A_0 est simple et celui A_n encastré et qu'on prenne le premier pour origine, les trois équations à adjoindre à celles que fournit le théorème fondamental sont (§ 472)

$$(8'')\qquad \begin{cases} M_0 = 0, \\ \int \frac{M}{I'} x\, dx = 0, \\ \int \frac{M}{I'} y\, dx = -E\delta\sum_i \tau_i l_i. \end{cases}$$

3° Si les deux appuis sont encastrés, les trois dernières équations sont remplacées (§ 446) par celles-ci :

$$(8''')\qquad \begin{cases} \int \frac{M\, dx}{I'} = 0, \\ \int \frac{M x\, dx}{I'} = 0, \\ \int \frac{M}{I'} y\, dx = -E\delta\Sigma\tau_i l_i. \end{cases}$$

§ 4.

EXTENSION DE LA MÉTHODE D'EDDY AUX POUTRES CONTINUES. — Lorsqu'on néglige l'effort tranchant et la compression de la fibre moyenne, la méthode d'Eddy peut être appliquée aux arcs continus.

Pour le montrer, nous observerons que, dans les équations qui fournissent la solution du problème, qu'il s'agisse d'un arc à appuis simples ou encastrés, en d'autres termes, qu'aux équations (7) on ait à adjoindre celles (8) et (8′) ou celles (8″) ou (8‴), il n'y a jamais qu'une seule d'entre elles où entre explicitement l'ordonnée y de l'arc, à savoir :

$$(9)\qquad \int \frac{M}{I'} y\, dx = -E\delta\Sigma\tau_i l_i.$$

Laissons-la de côté et considérons toutes les autres. Elles sont identiques à celles qui se rapportent à une poutre droite $A_0 A_n$ ayant le moment d'inertie I' et ayant pour appuis intermédiaires les projections des appuis de l'arc, ces appuis intermédiaires subissant des déplacements verticaux fictifs, égaux aux grandeurs données v'_i et les appuis extrêmes A_0, A_n de la poutre ayant les mêmes sujétions que ceux de l'arc, c'est-à-dire étant simples ou encastrés, suivant que ceux de l'arc sont eux-mêmes simples ou encastrés.

Considérons donc cette poutre droite et :

1° Supposons-la soumise aux charges données qui agissent sur l'arc, charges que nous supposerons à présent verticales.

Qu'on regarde I' comme constant ou variable, nous savons déterminer graphiquement les moments de flexion M' que ces charges déterminent dans la poutre.

Suivant les méthodes exposées dans la seconde Partie (Chap. VIII), on commencera par déterminer les deux foyers F_i, F'_i de chaque travée l_i; puis on tracera, dans chacune d'elles, un polygone funiculaire des charges agissantes et l'on en déterminera la ligne de fermeture : les ordonnées du polygone funiculaire comptées depuis cette ligne et multipliées par la distance polaire q_0 donneront en chaque point le moment de flexion produit dans la poutre par les charges données, abstraction faite des dénivellations des appuis, c'est-à-dire des abaissements verticaux donnés v'_i. On y ajoutera en chaque point le moment dû à ces dernières, qu'on sait également trouver. Soit

$$M' = q_0 z'_0 \tag{10}$$

le moment total ainsi obtenu en un point quelconque de la poutre.

Le moment de flexion M' satisfait à toutes les équations auxquelles doit satisfaire le moment de flexion inconnu M dans l'arc, sauf celle (9).

Il satisfait donc aux équations (7), de sorte qu'on aura identiquement

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i} \frac{M'}{I'}(x - x_{i-1})\,dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}} \frac{M'}{I'}(x - x_{i+1})\,dx \\ &\qquad = E\left(\frac{v'_{i-1} - v'_i}{l_i} + \frac{v'_{i+1} - v'_i}{l_{i+1}}\right), \end{aligned} \right. \tag{11}$$

et à celles-ci :

a. Si l'arc et, par suite, la poutre ont leurs extrémités simplement appuyées,

$$(12) \qquad M'_0 = M'_n = 0;$$

b. Si l'appui A_0 est simple et celui A_n encastré,

$$(12') \qquad M'_0 = 0, \qquad \int \frac{M'}{I'} x\, dx = 0,$$

en prenant le point A_0 pour origine;

c. Si A_0 et A_n sont encastrés,

$$(12'') \qquad \int \frac{M'}{I'} dx = 0, \qquad \int \frac{M'}{I'} x\, dx = 0.$$

2° Menons à présent les cordes A_0, A_1, ..., A_{i-1}, A_i, ... de l'arc donné et supposons que chaque travée l_i porte des charges verticales fictives telles, que la courbe funiculaire correspondante soit l'arc $A_{i-1}A_i$, la corde de cette courbe funiculaire étant la droite $A_{i-1}A_i$, et l'on cherchera les moments de flexion que ces nouvelles charges produiront dans la poutre, mais cette fois en supposant les appuis fixes, c'est-à-dire en supposant les déplacements verticaux v'_i tous nuls.

Les foyers de la poutre ayant été déterminés une fois pour toutes, on trouvera rapidement les moments de flexion dont il s'agit, c'est-à-dire les lignes de fermeture, telles que a_{i-1}, a_i (*fig.* A, *Pl. XXXIX*), à partir desquelles on devra compter les ordonnées y' pour avoir ces moments.

On voit que ces ordonnées seront toujours *très petites* par rapport à celles z'_0 dues aux charges, et souvent on pourra les négliger.

Si l'on veut les chercher, comme déjà les ordonnées comprises entre l'arc donné $A_{i-1}A_i$ et sa corde sont petites, on devra les amplifier toutes dans un même rapport arbitraire.

Sur la figure, on les a quintuplées. On a ainsi pour la travée l_i l'arc $A_{i-1}KA_i$, qu'on regardera comme une courbe funiculaire de charges verticales fictives agissant sur la travée dont il s'agit, toutes les autres travées étant vides.

On déterminera la ligne de fermeture $a''_{i-1}\,a''_i$ suivant la méthode du § 384.

Souvent on pourra approximativement regarder la portion $A_{i-1}A_i$ de l'arc donné, et par suite aussi l'arc amplifié $A_{i-1}KA_i$ comme un arc de parabole.

Alors la charge fictive à considérer serait sensiblement uniforme et, pour avoir la ligne de fermeture, il suffirait (§ 368), en appelant K le point de la courbe placé sur la verticale du milieu de la travée, de mener les lignes $A_{i-1}K$ et A_iK; les points f_i et f'_i où ces lignes sont coupées par les verticales des foyers sont deux points de la ligne de fermeture.

Les ordonnées comprises entre l'arc et cette ligne de fermeture sont proportionnelles aux moments de flexion que la charge fictive agissant dans la travée l_i seule produit dans cette travée. Si l'on porte ces ordonnées à partir de $A'_{i-1}A'_i$, on obtient la ligne représentative de ces moments et, en joignant les extrémités a'_{i-1} et a'_i de cette ligne respectivement aux foyers de gauche F_{i-1}, F_{i-2}, ..., et aux foyers de droite F'_{i-1}, F'_{i-2}, ..., suivant les règles établies, on aura ainsi la ligne représentative des moments de flexion que la charge fictive agissant dans la travée l_i seule détermine dans la poutre entière.

On fera la même opération pour chaque travée, et l'on fera, en chaque point, la somme algébrique des ordonnées des lignes ainsi obtenues. Soit y' l'ordonnée totale répondant à un point quelconque de la poutre, de sorte que y' est proportionnel au moment de flexion qu'on obtient en supposant que la poutre entière porte des charges fictives dont les courbes funiculaires auraient pour ordonnées les portions de verticales comprises entre l'arc donné A_0A_n et le polygone inscrit $A_0A_1A_2\ldots A_n$.

Ces moments de flexion y' satisfont aux équations (7) privées de leurs seconds membres, ainsi qu'aux équations (12), (12′) ou (12″), suivant les conditions auxquelles sont assujetties les deux extrémités de l'arc, c'est-à-dire qu'on aura identiquement

$$(13)\qquad \frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{y'}{I'}(x-x_{i-1})\,dx-\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{y'}{I'}(x-x_{i+1})\,dx=0$$

et, suivant les cas,

$$(14) \qquad y'_0 = 0, \qquad y'_n = 0,$$

$$(14') \qquad y'_0 = 0, \qquad \int \frac{y'}{I'} x\, dx = 0,$$

$$(14'') \qquad \int \frac{y'}{I'} dx = 0, \qquad \int \frac{y' x}{I'} dx = 0.$$

Ceci posé, les réactions des appuis intermédiaires de l'arc sont verticales, puisque les composantes verticales des déplacements des points A_i sont données.

Les forces directement appliquées à l'arc étant aussi supposées verticales, la composante horizontale de la résultante des forces élastiques dans les diverses sections est constante dans toute l'étendue de l'arc et égale à sa poussée que nous appelons q.

Par suite, le moment de flexion M dans chaque travée ne diffère de celui M' que par une fonction linéaire, en sorte que

$$M = M' + A'_i + B'_i x - q y,$$

les constantes A'_i et B_i changeant d'une travée à l'autre, mais celle q qui est la poussée restant la même dans toute l'étendue de l'arc.

Dans cette équation, l'ordonnée y de l'arc est comptée depuis $A_0 A_n$; si on l'amplifie dans le rapport quelconque $m : 1$ dans lequel on a amplifié les ordonnées comprises entre l'arc et les cordes $A_{i-1} A_i$, l'ordonnée obtenue my ne diffère dans chaque travée l_i de celle y' comptée depuis $a''_{i-1} a''_i$ que par une fonction linéaire de x de la forme

$$A''_i x + B''_i,$$

les coefficients A''_i et B''_i différant d'une travée à l'autre.

On a donc

$$my = y' + A''_i + B''_i x.$$

Par suite,

$$M = M' + \frac{1}{m}(A'_i - q A''_i) + \frac{B'_i - q B''_i}{m} x - \frac{q y'}{m},$$

ou

$$M = M' + M'' - \frac{q}{m} y',$$

où M″ est, dans chaque travée, une fonction linéaire, soit l'ordonnée d'une droite.

Portons cette expression de M dans les équations à satisfaire, sauf celle (9), c'est-à-dire dans les équations (11) et, suivant les cas, celles (12), (12′) ou (12″).

Comme M′ satisfait à toutes ces équations, que de plus y' et, par suite, $\frac{q}{m}y'$ satisfait à ces mêmes équations privées de leurs seconds membres, c'est-à-dire celles (13) et (14), (14′) ou (14″), la quantité

$$M' - \frac{q}{m}y'$$

satisfera elle-même, quelle que soit la constante $\frac{q}{m}$, à toutes les équations auxquelles doit satisfaire M, sauf celle (9), c'est-à-dire à celles (11) et (12), (12′) ou (12″).

Donc M″ devra nécessairement satisfaire à ces mêmes équations privées de leurs seconds membres, soit à (13) et (14), (14′) ou (14″), où la lettre y' serait remplacée par celle M″.

Cela signifie que M″ peut être considéré comme l'ordonnée de la ligne représentative du moment de flexion dans la poutre droite continue et ayant tous ses appuis de niveau, pour des charges convenablement choisies.

Mais comme M″ est, dans chaque travée, l'ordonnée d'une seule droite, les charges qui produisent ce moment ne peuvent être que nulles.

Ainsi, M″ est le moment de flexion qui se produit dans une poutre continue à appuis tous de niveau et entièrement vide. Ce moment est donc partout nul et l'on a nécessairement

$$M = M' - \frac{q}{m}y'; \tag{15}$$

moyennant cette expression, on satisfait à toutes les équations du problème, quel que soit $\frac{q}{m}$, sauf celle (9).

Portons cette valeur dans l'équation (9), elle devient

$$\int \frac{M'}{I'} y\,dx - \frac{q}{m}\int \frac{y'y\,dx}{I'} = -E\delta\sum \tau_i l_i;$$

d'où, pour la poussée q de l'arc,

$$(16) \qquad q = m\left(\frac{\int \frac{M'}{I'} y\,dx}{\int \frac{y'y}{I'} dx} - \frac{E\delta \sum_i \tau_i l_i}{\int \frac{y'y}{I'} dx}\right),$$

où le crochet se réduit à son premier terme si l'on fait abstraction de la température.

La ligne représentative du moment de flexion M' dans la poutre droite est, comme on sait, un polygone funiculaire des charges données de distance polaire arbitrairement choisie q_0, de sorte que, si z'_0 est l'ordonnée de la ligne représentative

$$M' = q_0 z'_0,$$

le second membre se construit comme dans les problèmes relatifs aux arcs ordinaires en le remplaçant approximativement par

$$(16') \qquad q = m\left(q_0 \frac{\sum \frac{z'_0}{I'} y}{\sum \frac{y'}{I'} y} - \frac{E\delta \sum_i \tau_i l_i}{\Delta x \sum \frac{y'}{I'} y}\right).$$

On voit donc, en résumé, que le problème est ramené à ceci :

1° Déterminer les moments de flexion $M' = q_0 z'_0$ produits par une poutre droite continue $A_0 A'_1 A'_2 \ldots A_n$ dont les appuis intermédiaires A'_i ont des dénivellations données v'_i sous l'influence des charges données qui agissent sur l'arc ;

2° Déterminer les moments de flexion y' que déterminent dans la même poutre, *mais en y supposant tous les appuis de niveau*, des charges verticales fictives telles, que leur courbe funiculaire soit l'arc donné, la corde de cette courbe funiculaire dans chaque travée étant la corde $A_{i-1} A_i$ de l'arc lui-même ; on peut, à la place de ces arcs, en prendre d'autres dont les ordonnées comptées depuis leurs cordes respectives sont celles des arcs amplifiées toutes dans un même rapport $m : 1$ choisi suivant les convenances de l'épure ;

3° Déterminer la poussée par la formule (16').

§ 5.

CAS D'UN POLYGONE CONTINU. — Supposons qu'au lieu d'un arc dont la fibre moyenne est $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ et dont les points A_i sont assujettis aux conditions ci-dessus indiquées on ait une pièce dont la fibre moyenne soit formée par les côtés $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... du polygone inscrit dans l'arc, les sommets de ce polygone étant soumis aux mêmes conditions.

La méthode précédente s'appliquant, quelle que soit la forme de la pièce considérée, devrait s'appliquer aussi à ce cas.

Mais il est évident qu'on obtiendrait alors en tous les points

$$y' = 0,$$

d'où

$$q = \infty.$$

Cela tient à ce que, dans ce cas, la poussée est produite par l'allongement de la fibre moyenne, que nous avons négligé dans le paragraphe précédent.

Si l'on en tient compte, c'est-à-dire si l'on fait usage des formules du § 2, on obtient pour la poussée une valeur finie.

En effet, dans l'expression (15) de M, le terme M' étant une fonction de x seulement, on a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y'}\frac{dy'}{dy} = m\frac{\partial M}{\partial y'} = -qm,$$

et l'équation (6) devient, si l'on néglige les termes de l'ordre de l'effort tranchant,

$$E\delta\sum_i \tau_i l_i + \int \frac{M}{I'} y\,dx - qm\int\frac{dx}{S'} = 0$$

ou, en mettant pour M sa valeur (15) où $M' = q_0 z'_0$,

$$E\delta\sum_i \tau_i l_i + q_0\int\frac{z'_0}{I'} y\,dx - \frac{q}{m}\left(\int\frac{y'}{I'}dx + m\int\frac{dx}{S'}\right) = 0$$

et

$$(17)\qquad q = m\frac{q_0\int\frac{z'_0}{I'} y\,dx + E\delta\sum_i \tau_i l_i}{\int\frac{y'}{I'}dx + m\int\frac{dx}{S}},$$

formule qui, si $y' = 0$, donne pour la poussée la valeur finie

$$(18) \qquad q = \frac{q_0 \int \frac{z'_0}{I'} y \, dx + E \delta \Sigma \tau_i l_i}{\int \frac{dx}{S'}}.$$

§ 6.

REMARQUE SUR LA GRANDEUR DES ORDONNÉES $\frac{y'}{m}$. — Si dans la formule (15) on remplace M′ par sa valeur

$$M' = q_0 z'_0,$$

on aura

$$M = q_0 z'_0 - q \frac{y'}{m}.$$

Les ordonnées $\frac{y'}{m}$ sont en général très petites par rapport à celles z_0 des polygones funiculaires des charges. Si donc les grandeurs q et q_0 sont comparables, le second terme sera, en général, négligeable et le moment de flexion M en un point de l'arc sera sensiblement le même que celui de la poutre droite qui coïnciderait avec sa corde.

Ce sera d'autant plus vrai que les appuis seront plus rapprochés.

§ 7.

CAS OU I′ EST CONSTANT. — Si I′ peut être regardé comme constant, toutes les formules et constructions qui précèdent comportent des simplifications sur lesquelles il est inutile d'insister.

B. — ARCS RELIÉS A DES POUTRES RIGIDES.

§ 8.

ÉQUATIONS FONDAMENTALES. — Soit (*fig.* B, *Pl. XXXIX*) un arc $A_0 A_n$ appuyé avec ou sans encastrement à ses extrémités A_0 et A_n et supposons qu'un certain nombre de points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_i, \quad \ldots, \quad A_{n-1}$$

de sa fibre moyenne soient reliés à des points

$$A''_1, \quad A''_2, \quad \ldots, \quad A''_i, \quad \ldots, \quad A''_{n-1},$$

appartenant à la fibre moyenne d'une poutre droite $A''_0 A''_n$ dont les deux extrémités reposent aussi sur des appuis fixes pouvant, comme les extrémités de l'arc, être ou non encastrés. La liaison a lieu à l'aide de tiges ou palées verticales $A_1 A''_1, \ldots, A_i A''_i, \ldots, A_{n-1} A''_{n-1}$ que nous supposons articulées à l'arc et à la poutre en leurs extrémités, de sorte que les réactions qu'elles font naître soit dans l'arc, soit dans la poutre, sont verticales.

Généralement, c'est la poutre qui reçoit seule des charges verticales; mais les formules qui suivent subsistent si l'arc lui-même porte des charges.

Nous désignerons les éléments relatifs à la poutre par les mêmes lettres que ceux analogues relatifs à l'arc, mais en les marquant d'un double accent, de sorte que le déplacement nécessairement vertical d'un point quelconque de la poutre est désigné par v'' et celui d'un des points d'appui A''_i par v''_i. Nous supposons, comme dans les formules précédentes, l'axe des x horizontal, les x positifs étant comptés de gauche à droite et l'axe des y vertical et ascendant, de sorte qu'une valeur positive de v'' représenterait un relèvement du point de la poutre auquel elle se rapporte.

Nous pouvons toujours écrire pour l'arc la formule fondamentale (5) du § 2, soit

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{M}{I'}(x-x_{i-1})\,dx-\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{M}{I'}(x-x_{i+1})\,dx\\ &\quad-\left(1+\frac{1}{g}\right)\left(\frac{1}{l_i}\int\frac{\frac{dx}{ds}}{S'}\,\frac{dM}{ds}\,dx-\frac{1}{l_{i+1}}\int\frac{\frac{dx}{ds}}{S'}\,\frac{dM}{ds}\,dx\right)\\ &\quad+\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{1}{S'}\,\frac{\partial M}{\partial x}\,dx-\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{1}{S'}\,\frac{\partial M}{\partial x}\,dx\\ &\quad=E\left\{\frac{v_{i-1}-v_i}{l_i}+\frac{v_{i+1}-v_i}{l_{i+1}}\right.\\ &\qquad\left.-\,\delta\left[\frac{\tau_i(y_{i-1}-y_i)}{l_i}+\frac{\tau_{i+1}(y_{i+1}-y_i)}{l_{i+1}}\right]\right\}, \end{aligned}\right.$$

en y adjoignant (§ 3) les trois équations relatives aux deux extrémités.

Mais, dans ces équations, les déplacements v_i ne sont plus donnés.

D'autre part, nous pouvons écrire, pour la poutre droite, l'équation analogue à celle (19), en remplaçant les lettres M, I', S', v_i par des lettres portant deux accents.

De plus on aura

$$y_i = y_{i-1} = y_{i+1},$$

de sorte que la température n'intervient pas. En outre, $dx = ds$ et M'' ne dépend que de x, en sorte que

$$\frac{dM''}{ds} = \frac{dM''}{dx}, \qquad \frac{\partial M''}{\partial y} = 0.$$

Par suite, l'équation relative à la poutre droite devient

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{M''}{I''}(x-x_{i-1})\,dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{M''}{I''}(x-x_{i+1})\,dx \\ &\quad -\left(1+\frac{1}{g}\right)\left[\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{1}{S''}\frac{dM''}{dx}dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{1}{S''}\frac{dM''}{dx}dx\right] \\ &= E\left(\frac{v''_{i-1}-v''_i}{l_i}+\frac{v''_{i+1}-v''_i}{l_{i+1}}\right). \end{aligned}\right.$$

Observons que, si l'on néglige l'effort tranchant, comme nous l'avons fait dans la théorie des poutres droites, le terme contenant le facteur $1+\frac{1}{g}$ est à supprimer, et alors l'équation (20), à la forme près, est la même que l'équation fondamentale trouvée dans la théorie des poutres continues (IIe Partie).

A ces équations (20) on doit joindre deux équations relatives aux deux extrémités de la poutre, à savoir :

a. Si les deux extrémités sont simplement appuyées,

$$(21)\qquad M''_0 = M''_n = 0;$$

b. Si elles sont encastrées et en négligeant l'effort tranchant.

$$(21')\qquad \int\frac{M''}{I''}\,dx = 0, \qquad \int\frac{M''}{I''}\,x\,dx = 0.$$

c. Si l'extrémité A_0 est simplement appuyée et l'extrémité A_n

encastrée et qu'on prenne A_0 comme origine des abscisses

$$(21'')\qquad M''_0 = 0, \qquad \int \frac{M''}{I''} x\,dx = 0.$$

Après avoir écrit séparément les équations qui régissent la poutre, nous avons à exprimer que chaque palée, telle que $A_i A''_i$, est en équilibre sous l'influence des réactions qu'elle éprouve en ses deux extrémités.

Ces réactions, si l'on néglige le poids de la palée, étant les deux seules forces qui la sollicitent, sont égales et opposées.

Or (§ 423) la somme des forces verticales agissant à la gauche d'un point quelconque de la fibre moyenne de l'arc est égale à la dérivée partielle $\frac{\partial M}{\partial x}$ du moment fléchissant M en ce point.

Soient respectivement

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-i} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{+i}$$

les valeurs de $\frac{\partial M}{\partial x}$ immédiatement à la gauche et à la droite du point d'attache A_i.

La différence

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-i}$$

représente la réaction verticale que l'arc exerce sur la palée en A_i.

Si cette force est positive, elle est ascendante et représente, par suite, une compression. Ainsi, si l'on appelle R_i la réaction exercée par l'arc sur la palée $A_i A''_i$, cette force étant comptée positivement si c'est une compression, on aura

$$(22)\qquad R_i = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-i}.$$

De même, la différence

$$\left(\frac{dM''}{dx}\right)_{+i} - \left(\frac{dM''}{dx}\right)_{-i}$$

représente l'action exercée par la poutre sur la même palée. Et, comme les deux forces que subit celle-ci en ses extrémités sont

égales et opposées, on aura

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-i} = -\left[\left(\frac{dM'}{dx}\right)_{+i} - \left(\frac{dM'}{dx}\right)_{-i}\right],$$

ou

$$(23)\qquad \left[\frac{\partial(M+M')}{\partial x}\right]_{+i} = \left[\frac{\partial(M+M')}{\partial x}\right]_{-i},$$

ce qu'on peut exprimer ainsi :

La fonction

$$\frac{\partial(M+M')}{\partial x}$$

ne doit pas avoir de discontinuité au passage des palées. Elle doit avoir la même valeur limite sur une palée, que l'on considère celle-ci comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux travées qu'elle sépare.

Soit σ_i la section horizontale d'une palée. Sa compression positive ou négative par unité de surface est

$$\frac{R_i}{\sigma_i}$$

ou

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-i}}{\sigma_i}.$$

Par suite, si $h_i = A_i A''_i$ est sa longueur, le *raccourcissement* positif ou négatif qu'elle subit est

$$\frac{E_0 h_i}{\sigma_i}\left[\left(\frac{dM'}{dx}\right)_{-i} - \left(\frac{dM'}{dx}\right)_{+i}\right],$$

en appelant E_0 son coefficient d'élasticité.

Mais ce raccourcissement est évidemment égal à la différence $v_i - v''_i$ des déplacements verticaux de ses extrémités ; d'où

$$(24)\qquad v_i - v''_i = \frac{h_i}{E_0\sigma_i}\left[\left(\frac{dM''}{dx}\right)_{-i} - \left(\frac{dM''}{dx}\right)_{+i}\right].$$

Si donc on retranche l'équation (20) de l'équation (19), on pourra éliminer les v_i et v''_i, de sorte qu'en négligeant les termes

de l'ordre de l'effort tranchant, on aura

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\left(-\frac{M}{I'}+\frac{M''}{I''}\right)(x-x_{i-1})\,dx \\ &\quad -\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\left(-\frac{M}{I'}+\frac{M''}{I''}\right)(x-x_{i+1})\,dx \\ &\quad -\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{1}{S'}\,\frac{\partial M}{\partial x}\,dx+\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{1}{S'}\,\frac{\partial M}{\partial x}\,dx \\ &= -\frac{h_{i-1}}{l_i\sigma_{i-1}}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{+(i-1)}+\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-(i-1)}\right] \\ &\quad +\frac{h_i}{\sigma_i}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{+i}-\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-i}\right]\left(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}}\right) \\ &\quad -\frac{h_{i+1}}{l_{i+1}\sigma_{i+1}}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{i+1}-\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-(i+1)}\right] \\ &\quad +E\delta\left[\frac{\tau_i(y_{i-1}-y_i)}{l_i}+\frac{\tau_{i+1}(y_{i+1}-y_i)}{l_{i+1}}\right]. \end{aligned}\right.$$

En général, les palées ont des dimensions telles que leur pression par unité de surface est extrêmement petite et, par suite, aussi la diminution de longueur qu'elles subissent.

Si on la néglige, ainsi que la compression de la fibre moyenne de l'arc, l'équation précédente se simplifie beaucoup et devient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\left(-\frac{M}{I'}+\frac{M''}{I''}\right)(x-x_{i-1})\,dx \\ &\quad -\frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\left(-\frac{M}{I'}+\frac{M''}{I''}\right)(x-x_{i+1})\,dx \\ &= +E\delta\left[\frac{\tau_i(y_{i-1}-y_i)}{l_i}+\frac{\tau_{i+1}(y_{i+1}-y_i)}{l_{i+1}}\right], \end{aligned}\right.$$

où le second membre s'annule si l'on fait abstraction des effets de la température sur l'arc.

§ 9.

USAGE DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES. — Les équations du paragraphe précédent permettent de résoudre complètement tous les problèmes que comporte l'étude d'un arc relié à une poutre.

Si n est le nombre des travées, le nombre des inconnues sera $2n+3$, à savoir :

1° Les moments de flexion M''_i aux points A'_i et aux deux appuis extrêmes de l'arc, au nombre de $n+1$;

2° Les moments analogues M_i relatifs à l'arc, également au nombre de $n+1$;

3° La poussée q de l'arc.

Quelles que soient les charges données qui agissent sur la poutre et sur l'arc, il est clair que le moment de flexion M'' en un point quelconque de la première peut s'exprimer linéairement à l'aide des $n+1$ moments inconnus M''_i et le moment de flexion M s'exprime de même linéairement à l'aide des $n+1$ constantes M_i et de la poussée q.

Or l'équation (25) [ou approximativement celle (26)] appliquée à chaque paire de travées contiguës fournit entre les inconnues du problème

$$n-1$$

équations linéaires.

De même, l'équation (23), appliquée à chacune des $n-1$ palées. fournit $n-1$ équations linéaires entre ces mêmes inconnues, soit en tout $2n-2$.

D'autre part, les conditions relatives aux deux extrémités de l'arc sont au nombre de 3, celles relatives aux deux extrémités de la poutre au nombre de 2; on aura donc en tout

$$2n-2+3+2=2n+3$$

équations linéaires à résoudre pour trouver les moments de flexion en tous les points de la poutre et de l'arc, par suite, aussi, les efforts tranchants représentés sur l'arc par la dérivée $\frac{dM}{ds}$ et, sur la poutre. par celle $\frac{dM''}{dx}$; la compression de la fibre moyenne de l'arc représentée (§ 423) par

$$N=\frac{\partial M}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial M}{\partial y}\frac{dx}{ds}$$

ou

$$N=\frac{\partial M}{\partial x}\frac{dy}{ds}+q\frac{dx}{ds},$$

q étant la poussée connue; et enfin la compression R_i que subit chaque palée, par l'équation (22) et la pression exercée sur chaque

appui extrême, par les équations analogues

$$R_0 = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_0,$$

$$R_n = -\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{-(n+1)},$$

où les seconds membres sont les valeurs de la dérivée partielle $\frac{\partial M}{\partial x}$ aux points A_0 et A_n.

§ 10.

SOLUTION GRAPHIQUE. — Je considère les trois cas suivants :

1° Les deux extrémités de l'arc reposent sur tourillons fixes et les deux extrémités de la poutre sur appuis simples, ce qui donne aux deux extrémités

$$(27) \qquad \begin{cases} M_0 = 0, & M_n = 0, \\ M''_0 = 0, & M''_n = 0. \end{cases}$$

2° Les deux extrémités de l'arc sont encastrées, ainsi que les deux extrémités de la poutre; d'où

$$(27') \qquad \begin{cases} \int \frac{M}{I'} dx = 0, & \int \frac{Mx}{I'} dx = 0, \\ \int \frac{M''}{I''} dx = 0, & \int \frac{M''x}{I''} dx = 0. \end{cases}$$

3° L'une des extrémités de l'arc, par exemple l'extrémité A_0, repose sur tourillon fixe et l'extrémité correspondante A''_0 sur appui simple, tandis que les deux extrémités A_n et A''_n sont encastrées, ce qui donne, en supposant l'axe des y dirigé suivant $A_0 A''_0$,

$$(27'') \qquad \begin{cases} M_0 = 0, & \int \frac{Mx}{I'} dx = 0, \\ M''_0 = 0, & \int \frac{M''x}{I''} dx = 0. \end{cases}$$

Dans les trois cas, il faut ajouter, si l'axe des x est dirigé suivant la droite $A_0 A_n$, l'équation

$$(28) \qquad \int \frac{My}{I'} dx + E\delta \sum_i \tau_i l_i = 0,$$

le second membre se réduisant à

$$E\delta\tau l = \delta\tau A_0 A_n,$$

si tout l'arc est à la même température τ et à zéro si cette température est celle de la pose de l'arc.

Dans ces équations, les intégrations sont à faire de $x = 0$ à $x = A_0 A_n = l$.

Cela étant, posons

$$(29) \qquad I'' = kI' = kI\frac{dx}{ds},$$

k étant une grandeur purement numérique que je supposerai constante dans toute la longueur de l'ouvrage considéré.

Ce n'est que dans cette hypothèse que la solution qui suit est applicable.

Posons de plus

$$(30) \qquad M'' - kM = M''',$$

et, au lieu de prendre comme inconnues les deux fonctions M et M'', nous prendrons comme inconnues les deux fonctions M''' et M''. Si elles sont déterminées, la dernière équation donnera M.

L'équation (26') deviendra

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\int_{l_i}\frac{M'''}{I''}(x - x_{i-1})\,dx - \frac{1}{l_{i+1}}\int_{l_{i+1}}\frac{M'''}{I''}(x - x_{i+1})\,dx \\ &= E\delta\left[\frac{\tau_i(y_{i-1} - y_i)}{l_i} + \frac{\tau_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{l_{i+1}}\right] \\ &= E\left(\frac{v''_{i-1} - v''_i}{l_i} + \frac{v''_{i+1} - v''_i}{l_{i-1}}\right), \end{aligned} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$(32) \qquad v''_i = \delta\tau_i y_i,$$

en sorte que v''_i sont des longueurs connues, nulles si la température de l'arc est celle de sa pose.

Les équations (27), (27') et (27'') deviennent respectivement, si l'on y remplace M par son expression en fonction de la nouvelle

inconnue M''',

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &M'''_0 = 0, \qquad && M'''_n = 0,\\ &M''_0 = 0, && M''_n = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(33')\qquad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{M'''}{I''}\,dx = 0, \qquad && \int \frac{M'''}{I''}\,x\,dx = 0,\\ &\int \frac{M''}{I''}\,dx = 0, && \int \frac{M''}{I''}\,x\,dx = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(33'')\qquad \left\{\begin{aligned} &M'''_0 = 0, \qquad && \int \frac{M'''x}{I''}\,dx = 0,\\ &M''_0 = 0, && \int \frac{M''x}{kI''}\,dx = 0. \end{aligned}\right.$$

Enfin l'équation (28) devient

$$(34)\qquad \int \frac{M'''y}{I''}\,dx = -\int \frac{M''y}{I''}\,dx - E\delta\sum_i \tau_i l_i.$$

a. **Recherche du moment de flexion auxiliaire à un coefficient q près.** — Occupons-nous d'abord de trouver la fonction inconnue M'''.

Si μ est le moment de flexion que les charges verticales directement appliquées à l'arc produisent sur une poutre A_0A_n à deux appuis simples et μ'' la quantité analogue pour les charges agissant sur la poutre $A''_0A''_n$, en sorte que μ et μ'' sont connus, on a, dans la travée l_i,

$$\begin{aligned} M &= \mu + A_i + B_i x - q y,\\ M'' &= \mu'' + A''_i + B''_i x, \end{aligned}$$

où A_i, B_i, A''_i, B''_i sont des constantes inconnues variables d'une travée à l'autre, tandis que le coefficient q qui représente la poussée de l'arc est le même dans toutes les travées. Par suite,

$$M''' = M'' - kM$$

est, dans la travée quelconque l_i, de la forme

$$M''' = \mu'' - k\mu + A'''_i + B'''_i x - q k_i y,$$

où

$$\begin{aligned} A'''_i &= A''_i - kA_i,\\ B'''_i &= B''_i - kB_i \end{aligned}$$

ont deux nombres constants pour chaque travée.

Concevons (*fig.* B_0, *Pl. XXXIX*) qu'on ait construit :

1° Un polygone funiculaire $\alpha_0\gamma_0\beta_0$ de distance polaire quelconque q_0 des charges directement appliquées sur l'arc et soient z_0 les ordonnées connues comprises entre ce polygone et sa corde;

2° Un polygone funiculaire $\alpha''_0\gamma''_0\beta''_0$ de même distance polaire q_0 des charges directement appliquées à la poutre et soient z''_0 les ordonnées de ce polygone comptées depuis sa corde. On aura

$$(34') \qquad \begin{cases} \mu = q_0 z_0, \\ \mu'' = q_0 z''_0, \\ \mu'' - k\mu = q_0(z''_0 - k z_0). \end{cases}$$

Amplifions les ordonnées z_0 dans le rapport constant et purement numérique $k:1$.

Retranchons les ordonnées amplifiées kz_0 de celles z''_0, de manière à obtenir un polygone $\alpha''_0\gamma'''_0\beta''_0$ dont les ordonnées comptées depuis la corde $\alpha''_0\beta''_0$ soient

$$(35) \qquad z'''_0 = z''_0 - kz_0.$$

On aura

$$M''' = q_0 z'''_0 + A'''_i + B'''_i x - qky.$$

Soit $a'''_{i-1}a'''_i$ une droite entièrement arbitraire et soient z''' les ordonnées du polygone $\alpha''_0\gamma'''_0\beta''_0$ comptées depuis cette ligne. Dans chaque travée, elles ne diffèrent de celles z'''_0 comptées depuis la corde $\alpha''_0\beta''_0$ que par une fonction linéaire de x; donc nous pouvons encore écrire

$$M''' = q_0 z''' + A^{\text{IV}}_i + B^{\text{IV}}_i x - qky,$$

A^{IV}_i, B^{IV}_i étant de nouvelles constantes.

De même l'ordonnée y de l'arc (*fig.* B) est comptée depuis la corde A_0A_n. Mais, si, dans chaque travée l_i, on la compte depuis une ligne de fermeture arbitraire $a_{i-1}a_i$ et qu'on appelle y_1 cette nouvelle ordonnée, elle ne diffère aussi de y que par une fonction linéaire de x différente d'une travée à l'autre, de sorte qu'on pourra écrire

$$M''' = q_0 z''' - qky_1 + A_i + B_i x,$$

A_i, B_i étant de nouvelles constantes.

Enfin, si les ordonnées y_1 sont jugées trop petites au point de

vue graphique, on pourra mener la corde $A_{i-1}A_i$, amplifier les ordonnées de l'arc $A_{i-1}A_i$ comptées depuis cette corde dans un rapport arbitraire $m:1$ qu'on prendra le même pour toutes les travées.

Amplifions dans le même rapport les ordonnées de la ligne de fermeture $a_{i-1}a_i$, de sorte que les ordonnées du nouvel arc $A_{i-1}KA_i$ comptées depuis cette dernière ligne que nous désignons par $a'_{i-1}a'_i$ sont celles y_1 multipliées par m.

Si on les appelle y', on aura

$$y_1 = \frac{y'}{m}$$

et

$$\text{(36)} \qquad M''' = q_0 z''' - \frac{qk}{m} y' + A_i + B_i x,$$

et cela, quelles que soient les lignes de fermeture $a'''_{i-1}a'''_i$ et $a'_{i-1}a'_i$. Suivant le choix qu'on fera de ces lignes, dans chaque travée, les deux constantes A_i et B_i relatives à cette travée se modifieront.

Ceci posé, considérons une poutre A_0A_n, dont les extrémités A_0 et A_n aient mêmes sujétions que celles de l'arc et dont les points A'_i situés sur les verticales des palées soient assujettis à subir les déplacements connus v'_i, déplacements nuls si l'on fait abstraction des effets de la température sur l'arc.

Supposons que cette poutre porte des charges fictives telles que, dans chaque travée, elles admettent le polygone $\alpha''_0\gamma'''_0\beta''_0$ pour polygone funiculaire de distance polaire q_0. Ces charges ne sont autres que celles que supporte la poutre, plus k fois celles que supporte l'arc, prises en sens contraires; si donc ces dernières sont nulles, comme il arrive le plus souvent, le polygone $\alpha''_0\gamma'''_0\beta''_0$ coïncide avec celui $\alpha''_0\gamma''_0\beta''_0$ et est relatif aux charges que porte la poutre.

Déterminons, ce que nous savons faire graphiquement, les moments de flexion que ces charges et les dénivellations v'_i produisent dans la poutre, en d'autres termes, déterminons les lignes de fermeture des polygones funiculaires $\alpha''_0\gamma'''_0\beta''_0$, à partir desquelles on devra compter les ordonnées de ce polygone dans chaque travée, pour qu'elles soient proportionnelles aux moments de flexion dont il s'agit, et ce sont ces lignes que nous prendrons pour les lignes

$a'''_{i-1}a'''_i$, de sorte que les moments de flexion cherchés soient

$$\overline{\mathrm{M}}''' = q_0 z'''. \tag{37}$$

Il résulte de là que les quantités connues $\overline{\mathrm{M}}'''$ ou $q_0 z'''$ mises à la place de M''' dans les équations (31) et, suivant les cas, dans les deux premières des équations (33), (33') ou (33''), satisfont identiquement à ces équations.

Considérons à présent la même poutre $A_0 A_n$, mais en supposant tous les points A'_i de niveau avec les appuis extrêmes; supposons-la soumise à des charges verticales qui, dans chaque travée $A'_{i-1}A'_i$, admettent pour courbe funiculaire l'arc $A_{i-1}KA_i$ et cherchons les moments de flexion qui y sont produits, c'est-à-dire les lignes de fermeture de ces courbes funiculaires. Ce sont ces lignes que nous prendrons pour les lignes de fermeture $a'_{i-1}a'_i$. Il en résulte que les ordonnées y' comptées depuis ces lignes, étant mises à la place de M''' dans les équations (31) *privées de leurs seconds membres* et, suivant les cas, dans les deux premières des équations (33), (33'), (33''), satisferont identiquement à ces équations.

De ce qui précède, il résulte que les expressions

$$q_0 z''' - \frac{qk}{m} y',$$

mises à la place de M''', satisfont aux équations (31) et aux deux premières des équations (33) ou (33') ou (33'') suivant le cas où l'on se trouvera et cela quel que soit q.

Comme M''' doit satisfaire à ces mêmes équations, il faut d'après (36) que les expressions linéaires

$$A_i + B_i x,$$

mises à la place de M''' dans les équations (31) privées de leurs seconds membres et dans celles (33) ou (33') ou (33''), y satisfassent aussi. On verrait, comme au § 4, que cela ne peut avoir lieu que si tous les coefficients A_i et B_i sont nuls; d'où résulte

$$\mathrm{M}''' = q_0 z''' - \frac{qk}{m} y', \tag{37'}$$

où tout est connu dans le second membre, sauf la poussée. La fonction M''' est ainsi déterminée à ce coefficient q près.

b. **Réactions produites sur les appuis par les moments de flexion M'''.** — Différentions l'expression de M''' par rapport à x : on aura

$$\frac{\partial M'''}{\partial x} = q_0 \frac{\partial z'''}{\partial x} - \frac{qk}{m} \frac{\partial y'}{\partial x};$$

d'où, pour la réaction sur un appui A'_i de la poutre $A_0 A'_1 \ldots A_n$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial M'''}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial M'''}{\partial x}\right)_{-i} = q_0 \left[\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)_{-i}\right] \\ - \frac{qk}{m}\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_{-i}\right]. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre représente la réaction comptée positivement de bas en haut que le moment de flexion M''' produirait sur l'appui A_i. Appelons R'''_i cette force fictive. On aura

$$(38') \qquad R'''_i = q_0 r_{0i} - \frac{qk}{m} r'_i,$$

en posant, pour abréger,

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)_{-i} = r_{0i}, \\ \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_{+i} - \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_{-i} = r'_i. \end{aligned} \right.$$

Les quantités r_{0i} et r'_i sont faciles à mesurer sur l'épure.

L'ordonnée z''' est une fonction de l'abscisse x et est indépendante de l'ordonnée y de l'arc. Donc la dérivée $\frac{\partial z'''}{\partial x}$ n'est autre que le coefficient angulaire répondant à l'ordonnée z'''. Cette ordonnée est celle du polygone $\alpha''_0 \gamma''_0 \beta''_0$ comptée depuis la ligne de fermeture $a'''_{i-1} a'''_i$.

On devra donc mesurer le rapport $\frac{\partial z'''}{\partial x}$ de part et d'autre de chaque appui A_i.

Pour avoir, par exemple, $\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)_{-i}$, c'est-à-dire immédiatement à gauche de A'_i, il suffit de mesurer à une échelle arbitraire, en millimètres par exemple, les ordonnées $\beta''_0 a'''_i$ et cc''' de deux points β''_0 et c du premier côté du polygone et, à la même échelle, la distance horizontale Δx entre les verticales $\beta''_0 a'''_i$ et cc''' et calculer

le rapport numérique

$$\left(\frac{\partial z_0'''}{\partial x}\right)_{-i} = \frac{\beta_0'' a_i''' - cc'''}{\Delta x}.$$

Ceci suppose toutefois que les ordonnées des polygones funiculaires ont été portées à la même échelle que les abscisses. Si l'échelle des ordonnées était 2, 3, ... fois plus grande que celle des abscisses, le second membre de la dernière équation devrait être divisé par 2, 3, ... Pour avoir de suite ce second membre, on prendra Δx égal à un nombre simple, par exemple égal à 5^{mm} ou 10^{mm}.

Si le premier côté du polygone analogue à $\alpha_0''\gamma_0'''\beta_0''$ dans la travée suivante est $\beta_0'' c_1$ et si la ligne de fermeture dans cette travée est $a'''a_{i+1}'''$, on aurait de même

$$\left(\frac{\partial z_0'''}{\partial x}\right)_{+i} = -\frac{\beta_0'' a_i''' - c_1 c_1'''}{\Delta x},$$

en supposant que les deux verticales considérées soient toujours à la même distance Δx.

Le signe — vient de ce que l'ordonnée de la droite $\beta_0'' c_1$ comptée depuis $a_i''' a_{i+1}'''$ décroît, quand x croît ou que le coefficient d'inclinaison de cette droite est négatif.

On a donc ainsi facilement les grandeurs purement numériques r_{0i} et, en les multipliant par la distance q_0 mesurée à l'échelle des forces, on aura les produits $q_0 r_{0i}$.

En ce qui touche les dérivées partielles $\frac{\partial y'}{\partial x}$, il faut observer que y' est de la forme

$$y' = y - A_i x + B_i$$

et

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = -A_i.$$

En d'autres termes, $\frac{\partial y'}{\partial x}$ est constant dans chaque travée $A_{i-1}' A_i'$ et égal au coefficient d'inclinaison de la ligne de fermeture $a_{i-1} a_i$ relative à cette travée; ce coefficient se mesure comme les précédents. On trouvera donc aisément les grandeurs purement numériques r_i' et, par suite, celles $\frac{r_i'}{m}$. Elles devront être multipliées par le facteur qk.

Ainsi, on connaît graphiquement les forces auxiliaires R_i''', comme on connaît le moment de flexion auxiliaire, c'est-à-dire au coefficient q près.

Remarque. — Les opérations (a) et (b) qui précèdent peuvent se résumer ainsi : on suppose l'arc $A_0 A_n$ détaché de la poutre, ses points d'attache étant supposés fixes, si l'on fait abstraction des effets de la température, et assujettis à prendre des déplacements verticaux

$$v_i' = E\,\delta\tau_i \frac{y_{i-1} - y_i}{l_i},$$

si l'on en tient compte.

On le suppose soumis :

1° A la poussée inconnue q qu'il subit effectivement ;

2° A des charges verticales égales à celles que supporte la poutre et à celles qu'il porte lui-même, ces dernières changées de sens et multipliées par k.

Le moment de flexion qui en résulte en chacun de ses points est celui M''' et la réaction sur chaque appui A_i est celle R_i'''.

c. **Détermination des réactions exercées par les palées sur la poutre droite $A_0''' A_n''$, au coefficient q près.** — Après la recherche des grandeurs fictives dont il vient d'être parlé, nous pouvons procéder à celle des réactions que subit effectivement la poutre droite reliée à l'arc.

Nous avons montré que la fonction

$$\frac{\partial(M + M'')}{\partial x}$$

est continue au passage des appuis. Or l'équation de définition (29) donne

$$M = \frac{-M''' + M''}{k}$$

et

$$M + M'' = \frac{-M'''}{k} + \left(1 + \frac{1}{k}\right) M'',$$

en sorte que

$$\frac{\partial \frac{M'''}{k}}{\partial x} + \frac{\partial \left(1 + \frac{1}{k}\right) M''}{\partial x}$$

est continu au passage des appuis.

Et, comme k est constant,

$$-\frac{\partial M''}{dx}+\frac{1}{1+k}\frac{\partial M'''}{\partial x}$$

est aussi continu, soit

$$-\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right)_{-i}+\frac{1}{1+k}\left(\frac{\partial M'''}{\partial x}\right)_{-i}=-\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right)_{+i}+\frac{1}{1+k}\left(\frac{\partial M'''}{\partial x}\right)_{+i}$$

ou

$$\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right)_{+i}-\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right)_{-i}=\frac{1}{1+k}\left[\left(\frac{\partial M'''}{\partial x}\right)_{+i}-\left(\frac{\partial M'''}{\partial x}\right)_{-i}\right]$$

ou, en vertu de (38′),

$$\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right)_{+1}-\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right)_{-i}=\frac{R_i'''}{1+k}=\frac{q_0 r_{0i}}{1+k}-qk\frac{r_i'}{m(1+k)}.$$

Le premier membre est la réaction R_i'' que subit effectivement la poutre droite $A_0''A_n''$ au point A_i''. Ainsi

$$R_i''=\frac{q_0 r_{0i}}{1+k}-qk\frac{r_i'}{m(1+k)}, \tag{40}$$

où tout est connu, sauf la poussée q.

d. **Recherche du moment de flexion M″ dans la poutre droite au coefficient q près.** — Nous pouvons supprimer les palées A_iA_i'' sans modifier l'état de la poutre $A_0''A_n''$, pourvu qu'aux charges données qui lui sont directement appliquées on adjoigne les réactions R_i'' qu'elles produisent. Nous n'aurons ainsi à considérer cette poutre qu'avec les deux seuls appuis extrêmes A_0'', A_n'', simples ou encastrés, suivant les données du problème. Supposons d'abord qu'elle ne supporte que les charges qui lui sont directement appliquées et aucune réaction R_i''. Soit $q_0\zeta_0$ le moment de flexion facile à trouver graphiquement, puisqu'il s'agit d'une poutre à deux appuis seulement, qui se produit en chacun de ses points.

Supposons ensuite que les charges qui la sollicitent réellement soient supprimées et qu'elle ne supporte que la force r_{0i} en chaque appui A_i, cette force étant ascendante ou descendante suivant que r_{0i} est positif ou négatif.

Soit ζ_0' le moment de flexion qui en résulte en chacun de ses

points, de sorte que, si ce sont des forces $\frac{q_0 r_{0i}}{1+k}$ qui agissent, le moment de flexion sera $\frac{q_0 \zeta'_0}{1+k}$.

Supposons enfin que les seules forces appliquées soient celles r'_i, ascendantes ou descendantes suivant que leurs valeurs sont positives ou négatives et soient ζ les moments de flexion qui en résultent, de sorte que, sous l'action des forces $-\frac{qk}{m}\frac{r'_i}{1+k}$, ces moments seraient $-\frac{qk}{m}\frac{\zeta}{1+k}$.

En vertu du principe de superposition, le moment de flexion effectif M″ sera

$$M'' = q_0\zeta_0 + \frac{q_0\zeta'_0 - \frac{qk}{m}\zeta}{1+k}, \tag{41}$$

où tout est connu, sauf la poussée q.

e. **Détermination du moment de flexion M de l'arc au coefficient q près.** — On a

$$M = \frac{M'' - M'''}{k}.$$

D'ailleurs

$$M''' = q_0 z''' - \frac{qk}{m} y'.$$

D'autre part, M″ est donné par (41).

Donc

$$M = \frac{q_0}{k}(\zeta_0 + \zeta'_0 - z''') - \frac{q}{mk}(\zeta - y').$$

f. **Détermination de la poussée q.** — Si l'on porte cette expression de q dans l'équation (28, § 10)

$$\int \frac{My}{I'}\,dx + E\delta\sum_i \tau_i l_i = 0,$$

il viendra, en ayant égard à $I'' = kI'$,

$$q_0\int \frac{(\zeta_0 - z''') + \frac{\zeta'_0}{1+k}}{I''}\,y\,dx + E\delta\sum_i \tau_i l_i - \frac{qk}{m}\int\left(\frac{\zeta}{1+k} - y'\right)\frac{y}{I''}\,dx = 0$$

ou

$$(42)\qquad q = \frac{m}{k}\,\frac{q_0\displaystyle\int \frac{\zeta_0 - z''' + \frac{\zeta'_0}{1+k}}{I''}\,y\,dx + E\delta\sum_i \tau_i l_i}{\displaystyle\int\left(\frac{\zeta}{1+k} - y'\right)\frac{y}{I''}\,dx},$$

se réduisant au premier terme si l'on fait abstraction des effets de la température.

Si l'on suppose de plus I'' constant et qu'on remplace les $\int$ par des sommes

$$(43)\qquad q = \frac{mq_0}{k}\,\frac{\sum\left(\zeta_0 - z''' + \frac{\zeta'_0}{1+k}\right)y}{\sum\left(\frac{\zeta}{1+k} - y'\right)y},$$

que l'on construit comme les expressions analogues trouvées précédemment, on voit que la poussée q varie beaucoup avec la valeur de k. Si l'on fait $k = 0$, soit

$$I'' = kI' = 0,$$

ce qui suppose qu'on ne tient pas compte de la raideur de la poutre droite, la poussée q sera la même que si les charges portaient directement sur l'arc.

Les opérations successives à faire sont alors celles-ci :

1° Supposer une poutre droite fictive A_0A_n, de section constante, dont les points intermédiaires A'_i seront des appuis simples, tous de niveau et fixes.

Déterminer le moment de flexion $M''' = q_0 z'''$, dans cette partie, sous l'influence des charges qui agissent sur la poutre donnée, ainsi que les réactions correspondantes $R_{0i} = q_0 r_{0i}$ sur les appuis.

A l'aide des moments M''' déterminer une première valeur du moment d'inertie I'' à donner à la poutre et, à l'aide des charges R_{0i} agissant sur l'arc, considéré comme un arc ordinaire à deux appuis, déterminer de même une première valeur à donner au moment d'inertie I de l'arc; d'où l'on déduira $I' = I\,\frac{dx}{ds}$.

On adoptera pour $k = \frac{I''}{I'}$ une valeur moyenne du second membre.

2° Supposer cette même poutre soumise à des charges verticales fictives, telles que, dans chaque travée $A'_{i-1}A'_i$, la courbe funiculaire de ces charges soit la partie correspondante $A_{i-1}A_i$ de l'arc donné limité par sa corde et déterminer les lignes de fermeture correspondantes.

On simplifie beaucoup l'opération en regardant les portions de l'arc comprises entre deux points d'attache consécutifs comme des arcs de parabole (§ 468). On sera aussi amené à amplifier les ordonnées de ces arcs dans un rapport $m:1$ et à déterminer les lignes de fermeture des arcs amplifiés. Soient y' les ordonnées comprises entre les arcs ainsi amplifiés et leurs lignes de fermeture dans chaque travée; soient r'_i les réactions correspondantes sur les appuis, c'est-à-dire les réactions qui se produiraient si y' étaient des moments de flexion effectifs, en sorte que

$$r'_i = \left(\frac{dy'}{dx}\right)_{+i} - \left(\frac{dy'}{dx}\right)_{-i},$$

qu'on relève sur l'épure comme coefficients angulaires, ainsi qu'il a été expliqué.

3° Ces recherches réunies fournissent le moment de flexion M''' que les charges données eussent produit sur l'arc en supposant les points d'attache A_i fixes, à savoir

$$M''' = q_0 z''' - q\frac{k}{m}y'.$$

Par suite, la réaction R''_i que subit effectivement la poutre droite donnée au point A''_i sera

$$R''_i = \frac{q_0 r_{0i} - q\frac{k}{m}r'_i}{1+k}.$$

4° Connaissant, au coefficient q près, les réactions R''_i aux points A''_i, on trouve, à ce même coefficient près, le moment de flexion M'' dans la poutre, puisqu'elle peut être considérée comme une poutre à deux appuis A''_0 et A''_n soumise aux charges données et aux réactions connues R''_i; on cherchera d'abord le moment de flexion M''_0 qui se produirait si l'on avait $q = 0$, puis celui M''_1 qui se produirait si l'on avait $q = 1$, et l'on aura

$$M'' = M''_0 - M''_1 q.$$

5° Ayant M''' et M'' exprimés linéairement en q, on a, à cause de

$$M''' = M - kM',$$

le moment de flexion M de la même manière.

Portant cette valeur de M dans l'équation

$$\int \frac{My}{I'} dx = 0,$$

qui se réduit à

$$\int My\,dx = 0$$

et approximativement à

$$\Sigma My = 0,$$

on obtient la poussée q.

6° Les moments de flexion M et M'' étant ainsi connus, on en déduit de nouvelles valeurs pour les moments d'inertie I et I'' par la condition d'égale résistance.

7° Ayant ces valeurs, on en cherchera, si on le désire, d'autres plus exactes en ayant égard à la température.

Soit τ_i l'une des températures extrêmes que peut subir la travée l_i. Généralement τ_i aura la même valeur τ pour toutes les travées.

On recommencera les opérations précédentes en adoptant pour k la valeur moyenne du rapport $\frac{I''}{I'}$ qui vient d'être trouvé.

De même on prendra, si l'on ne veut pas avoir égard à la variabilité de I', une valeur moyenne de I''.

Dans l'opération 1°, au lieu de supposer les appuis de la poutre fictive tous de niveau, on leur attribuera des ordonnées

$$v''_i = E\,\delta\tau y_i,$$

les ordonnées y_i de l'arc étant comptées depuis sa corde.

Les autres opérations subsistent sans changement.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

10680 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.


Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡ

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS;

PAR

M. Maurice LÉVY,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE CENTRALE
DES ARTS ET MANUFACTURES.

DEUXIÈME ÉDITION.

IIIe PARTIE.

ARCS. PONTS SUSPENDUS. CORPS DE RÉVOLUTION.

ATLAS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1887